UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

ADA RAMOS DE ABREU
LETICIA TOIGO
VINICIUS VOZNIEK

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL
2021

ADA RAMOS DE ABREU
LETICIA TOIGO
VINICIUS VOZNIEK

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Profº. Dr. Rogério Luis Rizzi

CASCAVEL
2021

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus pelo dom da vida e, pela oportunidade de acordar todos os dias com paciência e coragem.

Agradecemos a todos que estiveram presentes e contribuíram na realização deste trabalho. Em especial ao professor e orientador Rogério Luis Rizzi, por compartilhar seus conhecimentos, aprimorando nossas atividades e aulas, por agir com afeto e carinho, sempre nos incentivando e acreditando em nosso potencial.

Aos nossos familiares que mesmo distantes estavam sempre orando por nós, nos dando forças e nos apoiando a seguir em frente, superando todos os obstáculos para atingir nossos sonhos.

Aos nossos colegas de graduação, por compartilharem as alegrias e dificuldades no decorrer dessa caminhada, por todo o incentivo constante e experiência mútua.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente na conclusão desta etapa.

.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é um relatório das ações desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado I, ofertada no terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Nele estão presentes os planos de aula e os relatórios de cada encontro, bem como as descrições da metodologia utilizada em cada atividade de ensino e das vivências durante o período de desenvolvimento do projeto.

O conteúdo trabalhado com os alunos inscritos no projeto PROMAT, foi dividido em 18 encontros. Nos primeiros 9 encontros os alunos do curso de Licenciatura em Matemática que estão cursando a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I, trabalharam com turmas de, em princípio, 30 alunos. Esses 9 encontros foram divididos em 3 módulos, qual o primeiro módulo aborda os conceitos sobre Função; o segundo módulo sobre progressões; e o terceiro módulo sobre sistemas lineares e matrizes. Os encontros eram realizados aos sábados pela manhã, das 9:00h às 11:30h.

Os planos de aula e a metodologia utilizada pelo grupo, foi pensada para que o PROMAT desse enfoque ao Vestibular da UNIOESTE e aos demais vestibulares, sendo assim, grande parte dos exercícios propostos foram retirados de provas destes vestibulares e do ENEM.

Sobre a elaboração das atividades a serem realizadas durante as aulas, planos de aulas, lista de exercícios e atividades lúdicas, tínhamos a preocupação de serem realizadas por todo o grupo, porém, algumas vezes isso não foi possível. As aulas da disciplina foram de grande importância, pois, eram oportunidades de compartilharmos ideias, sobre como abordaríamos o conteúdo com os alunos.

Em nossas aulas abordamos as tendências de Resolução de problemas e de Investigação Matemática, pois faz-se necessário contemplar ao aluno conceitos, definições e sugestões que propiciem melhor compreensão e apropriação dos conteúdos, interligando a Matemática com as vivências do dia a dia.

Além disso, em nossa prática pedagógica utilizamos de algumas ferramentas tecnológicas para materialização e elaboração, com objetivo de tornar as aulas mais dinâmicas e prazerosas, propiciando melhor apropriação dos conceitos por parte dos alunos.

A utilização desses recursos tecnológicos, durante as aulas, foi um instrumento valioso, pois, viabilizou que definições e propriedades fossem projetadas durante as aulas e, posteriormente enviadas aos alunos, além de claro, ser a base central tendo em vista o momento atual de pandemia que vivemos. Isso nos auxiliou quanto à utilização do tempo, poupando-o em diversas vezes, sem a necessidade de que ocupássemos parte da aula escrevendo. O software Geogebra foi de fundamental importância para a aplicação de muitos dos conteúdos, principalmente acerca de geometria e gráficos de funções, consequentemente, e o utilizamos diversas vezes durante as aulas.

2. PROMAT

O projeto PROMAT – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática é executado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no *Campus* de Cascavel. São ofertados conteúdos de Matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, na forma de “Curso Preparatório de Matemática”, objetivando a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas Matemáticas.

As aulas foram ministradas por alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. As aulas ocorreram aos sábados de manhã, totalizando, neste momento em especial, 18 encontros de três horas aulas e meia. Foram atendidos alunos de Ensino Médio da rede pública de ensino oriundos da cidade de Cascavel e região, egressos do Ensino Médio, também alunos ingressantes no curso de Matemática e de outros cursos que fizeram inscrições no projeto.

No “primeiro semestre” do PROMAT, trabalhamos com conteúdos de Matemática do Ensino Médio, enfocando sempre problemas dos vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), já que nosso objetivo era preparar os alunos para essas avaliações, sanar suas dúvidas e despertar o gosto pela Matemática, rompendo aquela imagem que a mesma é chata e sem utilidade. Para cumprir com esses objetivos foram produzidas aulas, materiais e atividades dinâmicas.

O projeto é de suma importância para todos os participantes, tanto para os alunos que visam ampliar seus conhecimentos e em decorrência disso, suas chances de entrar em cursos de Ensino Superior, quanto para os estagiários que visam ampliar suas experiências e necessitam da prática para se prepararem e promoverem uma educação de qualidade.

Vale ressaltar ainda o momento oportuno em que foi aplicada as aulas. Por conta da pandemia, o modelo de aula foi o remoto, síncrono, qual foi um desafio para os estagiários. Por conta de questões tecnológicas e até mesmo de interação, em que os estagiários aplicavam os conhecimentos aos alunos por meio de uma plataforma de vídeochamada e aguardavam retornos, as aulas tiveram que carregar um teor de maior animação e propagação externa, em grupos de redes sociais.

3. MÓDULO 1: FUNÇÕES

Neste módulo, apresentamos os planos de aulas com seus respectivos relatórios, qual teve por conceito central a ideia de Funções.

3.1.1 Plano de Aula 1

PLANO DE AULA
1º ENCONTRO - 06/03/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

- Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Compreender os fundamentos do conceito de Função e suas aplicações por meio deexercícios e situações problemas quais se cobraram as suas propriedades.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com funções, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Construir o conceito de Função utilizando situações problemas;
- Determinar e compreender a lei de formação de uma Função por meio de gráficos;
- Identificar domínio e imagem de uma Função;
- Caracterizar os tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora, crescente e decrescente;
- Identificar funções de 1º e 2º graus;
- Encontrar ponto máximo e mínimo de uma Função;

- Conteúdo:

Definição de Função; Domínio e Imagem; Tipos de Função, Função Polinomial do 1° e 2°grau; Aplicações e Resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet, SoftwareGeoGebra e outras ferramentas como o Mentimenter, de acesso em https://www.mentimeter.com/pt-BR e o Miro, com acesso em https://miro.com/login/ para participação conjunta.

DINÂMICA DE APRESENTAÇÃO (30 min)

Daremos início ao primeiro encontro por meio de uma dinâmica com os alunos do PROMAT para propiciar um momento de integração e apresentação entre eles, como também saber qual a área que cada um pretende seguir. A dinâmica consiste em questionar os alunos dessas questões.

Após a apresentação, iremos explicar aos alunos que o PROMAT é um Projeto de Ensino Institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. Em sua primeira fase, as atividades são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores. Serão ofertados conteúdos de Matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da UNIOESTE, no ENEM e em outros processos seletivos, na forma de "Curso Preparatório de Matemática", objetivando a apropriação de determinados conteúdos e conceitos.

As aulas serão ministradas pelo alunos do 3° ano do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIOESTE de Cascavel.

Em seguida, será mencionado que ocorrerão nove encontros aos sábados, com nós estagiários, e outros nove com outros estagiários, sendo que os encontros são divididos em conteúdos distintos que referem-se à três categorias importantes do ensino da Matemática, sendo Introdução às Funções, Polinômios e Equações, Função Afim e Função Quadrática, Sistemas, Determinantes e Matrizes.

Dada a explicação abrangente acerca do Projeto, suas diretrizes e seus objetivos, iremos em poucos minutos proporcionar incentivo aos alunos, para que não apenas na aula vigente, mas como em todas as demais, sejam compreensivos, dedicados, focados e acima de tudo, voluntários a aprender.

Solicitaremos aos alunos participantes do projeto que ingressem em grupo no aplicativo WhatsApp, criado com o intuito de facilitar a comunicação, possibilitar o esclarecimento de dúvidas, além de compartilhar os acessos para as aulas.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO (2h)

Sabemos que Função é um dos conceitos mais abordados e relevantes no estudo da Matemática e suas aplicações. Em um simples cálculo de preços, de áreas, de distância percorrida em relação ao tempo, dentre muitos outros, utilizamos conceitos e diversos tipos funções e não nos damos conta disso.

A noção de Função foi-se construindo e aperfeiçoando ao longo de vários séculos, deacordo com Brito (2010), os Babilonios já teriam a ideia do conceito de funções, uma possível prova disso é o fato de a Astronomia da época ser baseada em tábuas de quadrados, cubos e de raízes quadradas.

Os pitagóricos também fizeram suas próprias contribuições correlacionando as grandezas físicas, por exemplo, alturas dos sons e dos comprimentos das cordas vibrantes (leis da acústica). Na época da Alexandria, contribuíram com a construção de tabelas de comprimento de cordas de um círculo, mais tarde denominado raio de uma circunferência.

Posteriormente vários acontecimentos surgiram ao longo dos séculos, esses eram relacionados à utilização de funções como a representação da velocidade de um móvel ao longo do tempo, a utilização de eixos cartesianos para a representação de uma Função, além da descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias com o estudo da queda dos corpos e a relação entre espaço e tempo.

Com o passar dos tempos, a partir de investigações Matemáticas percebeu-se a grande importância da empregabilidade das funções distribuídas nos mais variados campos da ciência moderna, podendo ser considerada como pilar de várias bases de conhecimento.

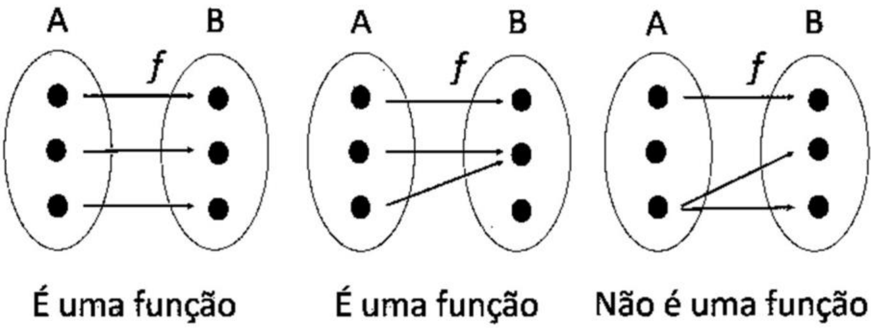
A história do conceito será abordada por meio do vídeo disponível no link: https://www.youtube.com/watch?v=pYQzdY40yr8, qual será disposta algumas determinadas partes do mesmo. O vídeo apresentado no computador pelo qual está sendo apresentada a aula, com a gravação.

Base ao vídeo, iremos introduzir o conceito de Função, suas aplicações, características e exemplos, impondo virtualmente os textos a seguir como base para estudo e consequentemente, para anotações dos alunos.

- Definição: Função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto A a um único elemento de outro conjunto B. Para cada valor de $x \in A$, pode-se determinar um único valor de $y \in B$.

Em uma Função $f: A \rightarrow B$ o conjunto A é designado de domínio e o conjunto B é denominado de contradomínio.

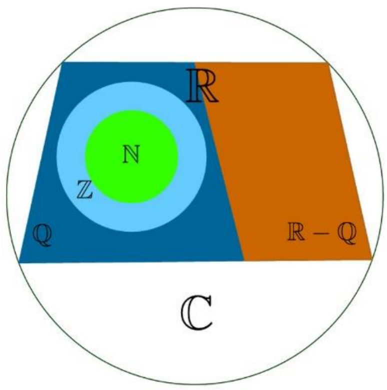
Figura 1- Representação utilizando Diagrama de Flechas



Conforme a Figura 1, um elemento de B relacionado a um elemento de A recebe o nome de imagem do elemento pela Função. Agrupando todas as imagens de B temos um conjunto Imagem, que é um subconjunto do contradomínio.

Após breve explicação acerca dos Conjuntos Dominio, Imagem e Contradominio, traremos uma revisão dos Conjuntos Númericos, entre eles, *Natural, Inteiro, Real e Racional,* relacionando os mesmos com seus respectivos elementos e suas características.

Figura 2 - Conjuntos Numéricos



- Conjunto dos Números Naturais: O conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N}$.Ele reúne os números positivos incluindo o zero e é infinito.

- Conjunto dos Números Inteiros: O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z}$. Reúne todos os elementos dos números naturais ($\mathbb{N}$) e seus opostos. Assim, conclui-se que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

- Conjunto dos Números Racionais: O conjunto dos números racionais é representado por $\mathbb{Q}$. Reúne todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$ sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$. Vale ressaltar que, todo número inteiro é também número racional. Assim, $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$.

- Conjunto dos Números Irracionais: O conjunto dos números irracionais é representado por II. Reúne os números decimais não exatos com uma representação infinita e não periódica, por exemplo, π.

- Conjunto dos Números Reais: O conjunto dos números reais é representado por $\mathbb{R}$. Esse conjunto é formado pelos números racionais $\mathbb{Q}$ e irracionais II Assim, temos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{II}$. Além disso, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e II são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Deve-se salientar que se um número real é racional, ele não pode ser também irracional. Da mesma maneira, se ele é irracional, não é racional. Base a isto, traremos também os tipos de Função, embasando as próximas aulas quais trataremos as funções afim, quadrática com características de funções crescentes, decrescentes, par e ímpar e ademais.

TIPOS DE FUNÇÕES MAIS USUAIS:

– Função constante;

– Função par;

– Função ímpar;

– Função afim ou polinomial do 1° grau

– Função linear;

– Função crescente;

– Função decrescente;

– Função quadrática ou polinomial do 2° grau

– Função modular;

– Função exponencial.

- Exemplo 1)

Em uma indústria metalúrgica o custo de produção de uma peça automotiva corresponde a um custo fixo mensal de R$ 5.000,00 acrescido de um custo variável de R$ 55,00 por unidade produzida mais 25% de impostos sobre o custo variável. Considerando que o preço de venda dessa peça pela indústria aos comerciantes é de R$ 102,00, obtenha:

a) A Função custo da produção de x peças.

b) A Função receita referente a venda de x peças.

c) A Função lucro na venda de x peças.

d) O lucro obtido com a venda de 500 unidades.

Resolução:

a) A Função custo será dada pela somatória do custo fixo, do custo variável e do imposto cobrado de acordo com o custo variável.

$$\text{Custo} = 5000 + 55x + 0{,}25 \,.\, 55x$$

b) A Função receita é determinada por:

$$\text{Receita} = 102\text{x}$$

c) A Função lucro é obtida subtraindo a Função custo da Função receita.

$$\text{Lucro} = 102x - (5000 + 55x + 0{,}25 \,.\, 55x)$$
$$\text{Lucro} = 102x - 5000 - 55x - 0{,}25 \,.\, 55x$$
$$\text{Lucro} = 102x - 55x - 13{,}75x - 5000$$
$$\text{Lucro} = 33{,}25x - 5000$$

d) O lucro obtido com a venda de 500 unidades corresponde a:

$$f(500) = 33{,}25 \,.\, 500 - 5000$$
$$f(500) = 11.625$$

E assim, o lucro obtido é igual a R$ 11.625,00.

Dado o exemplo, iremos introduzir o conceito de Função afim, tendo em vista que o exemplo relaciona as variáveis, com a finalidade de transformar a equação em uma fórmula geral, uma Função.

- Definição: A Função afim, também chamada de Função do 1º grau, é uma Função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais.

Neste tipo de Função, o número a é denominado de coeficiente angular de x e representa a taxa de crescimento ou taxa de variação da Função. Já o número b é designado como coeficiente linear. Quando uma Função afim apresentar o coeficiente angular igual a zero, a = 0, a Função será chamada de constante. Ao passo que, quando $b = 0$ e $a = 1$ a Função é chamada de Função identidade. Temos ainda que, quando o coeficiente linear é igual a zero, $b = 0$, a Função afim é chamada de Função linear.

Explicado a definição de Função Afim, iremos propiciar soluções a respeito do tema abordado, tomando valores para os conjuntos domínio.

- Exemplos 1)

Em uma determinada cidade, a tarifa cobrada pelos taxistas corresponde a uma parcela fixa chamada de bandeirada e uma parcela referente aos quilômetros rodados. Sabendo que uma pessoa pretende fazer uma viagem de 7 km em que o preço da bandeirada é igual a R$ 4,50 e o custo por quilômetro rodado é igual a R$ 2,75, determine:

a) Uma fórmula que expresse o valor da tarifa cobrada em Função dos quilômetros rodados para essa cidade.
b) Quanto irá pagar a pessoa referida no enunciado.

Resolução:

a) De acordo com os dados, temos que $b = 4{,}5$, pois a bandeirada não depende da quantidade de quilômetros percorridos. Cada quilômetro rodado deverá ser multiplicado por 2,75, sendo assim, esse valor é igual a taxa de variação, ou seja, $a = 2{,}75$. Considerando $p(x)$ o preço da tarifa, pode-se escrever a seguinte fórmula para expressar esse valor:

$$p\,(x) = 2{,}75x + 4{,}5$$

b) Agora que já definimos a Função, para calcular o valor da tarifa basta substituir 7 km no lugar do x.

$$p\,(7) = 2{,}75\,.\,7 + 4{,}5 = 19{,}25 + 4{,}5 = 23{,}75$$

Portanto, a pessoa deverá pagar R$ 23,75 por uma viagem de 7 km.

2) O dono de uma loja de moda praia teve uma despesa de R$ 950,00 na compra de um novo modelo de biquíni. Ele pretende vender cada peça deste biquíni por R$ 50,00. Apartir de quantas peças vendidas ele passará a ter lucro?

Resolução:

Considerando x a quantidade de peças vendidas, o lucro do comerciante será dado pela seguinte Função:

$$f\,(x) = 50x - 950$$

Ao calcularmos $f\,(x) = 0,$ iremos descobrir a quantidade de peças necessárias para que o comerciante não tenha nem lucro, nem prejuízo.

$$50x = 950$$

$$x = 950/50$$

$$x = 19$$

Assim, se vender acima de 19 peças terá lucro, se vender menos terá prejuízo.

Com isto, encerramos a aula corrigindo as questões com os alunos e incentivando os mesmos à resolverem os exercícios, os quais serão disponibilizados via grupo WhatsApp.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

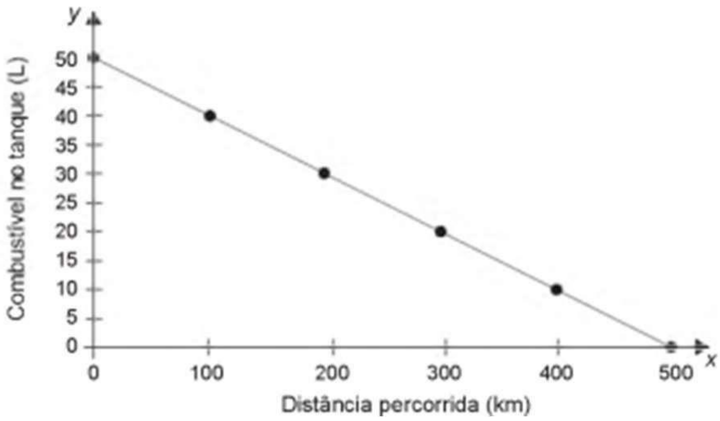
TODA MATÉRIA, Função Afim, Disponível em <https://www.todamateria.com.br/funcao- afim/>; Acesso em 8 de fev. 2021.

GEEKIE GAMES, Conjuntos Numéricos | Resumo. Disponível em <https://geekiegames.geekie.com.br/blog/o-que-sao-conjuntos-numericos/>; Acesso em 8 de fev. 2021.

ANEXO 1 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) (ENEM – 2018 – Adaptada) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo *y* (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo *x* (horizontal).

Figura 3 - Função Decrescente



Qual expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel?

Resolução: Sabemos que uma reta não vertical define a representação gráfica de uma Função afim e que sua forma algébrica é $y = ax + b$, em que x e y formam o par ordenado (x, y) no plano cartesiano. Portanto, a partir de pontos da reta encontraremos a e b, chamados coeficientes angular e linear, respectivamente.

Também é de conhecimento que o valor do coeficiente angular a pode ser encontrado a partir da expressão:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{y - y_0}{s - s_0}$$

Usando de quaisquer pontos distintos da reta, nesse caso $(0{,}50)$ e $(100{,}40)$, temos:

$$a = \frac{50 - 4}{0 - 100} = -\frac{10}{100} = -\frac{1}{10}$$

Agora, para encontrar o coeficiente linear b, é preciso preencher $y = ax + b$ com valores já conhecidos $a = -1/10$ e um par ordenado qualquer, aqui sendo $(500{,}0)$,

$$0 = -\frac{1}{1}.500 + b$$

$$0 = -50 + b$$

$$b = 50$$

Portanto, a Função que expressa a situação é:

$$y = -\frac{x}{10} + 50.$$

2) (ENEM-2010 - Adaptada) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra. A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = 24$

c) $f(x) = 27$

d) $f(x) = 3x + 24$

e) $f(x) = 24x + 3$

Resolução: A anuidade para andar de bicicleta custa 24 reais, ou seja, sempre será pago 24 reais mais as horas extras usadas. Sendo x o número de horas extras e 3 dólares a hora, podemos dizer que a cada x horas extras são pagos 3 dólares sendo assim, podemos expressar as horas extras como $3x$. Logo a expressão que melhor representa é $f(x) = 3x + 24$.

3) (Uepa 2015) Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU) a população da Terra atingiu a marca de 7,2 bilhões de habitantes em 2013, dados publicados no estudo “Perspectivas de População Mundial”. De acordo com as projeções de crescimento demográfico, seremos 8,1 bilhões de habitantes em 2025 e 9,6 bilhões de habitantes em 2050. Supondo que a partir de 2025, a população mundial crescerá linearmente, a expressão que representará o total de habitantes (H), em bilhões de pessoas, em Função do número de anos (A) é:

a) $H = 0{,}060.A + 8.1$

b) $H = 0{,}036.A + 7{,}2$

c) $H = 0{,}060.A + 9{,}6$

d) $H = 0{,}036.A + 8{,}1$

Resolução: Tomando $A = 0$ para o ano de 2025 temos que $H = 8{,}1$. Tomando $A = 25$ para o ano de 2050, obtemos os pontos $(0;\ 8{,}1)$ e $(25;\ 9{,}6)$. Desse modo, temos que,

$$m = \frac{9{,}6 - 8{,}1}{25} - 0$$

$$m = \frac{1{,}5}{25} = 0{,}06$$

Portanto, a lei de H é $H(A) = 0{,}06.A + 8{,}1$.

Após apresentada o Plano de Aula 1, abaixo atesta o relatório desta aula ministrada.

3.1.2 Relatório 1

No dia 6 (seis) de março de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o primeiro encontro do PROMAT via Jitsi Meet (https://meet.jit.si/promat_sala1). A nossa lista de chamada é composta por 39 alunos, porém, no início da aula havia 28 alunos presentes (conectados). Nosso grupo é formado por três alunos do 3° ano do Curso de Licenciatura Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

No início da aula, o professor orientador Rogério, deu uma rápida fala sobre o projeto, e em sequência, nos apresentamos, cumprimentamos e agradecemos a presença de todos. Em seguida, deu-se a explicação para os alunos sobre a utilização da Plataforma Jitsi Meet, por meio da qual qual serão realizadas todas as aulas, para que não tivessem dúvidas quanto a sua utilização.

Informamos aos alunos que a participação deles é de grande importância, ressaltando que, não deveriam apenas se satisfazer em ouvir o professor explanando o conteúdo, mas também participarem ativamente da aula, e buscar sanar todas as suas dúvidas. Posteriormente a aula se voltou a uma atividade de integração entre os alunos, que deveriam se apresentar, falando algumas informações pessoais, tais como nome, idade, cidade de onde mora e qual curso pretendiam fazer na graduação.

A primeira aula do PROMAT, tratou sobre a introdução às funções. Iniciamos a aula utilizando um programa chamado mentimenter, cujo link para acesso dos alunos, foi disponibilizado via chat da plataforma e grupo de WhatsApp.

Ele continha uma imagem de conjuntos e a palavra Função, em que se solicitava para escrever três palavras que viessem na memória ao ver a imagem.

O objetivo dessa dinâmica era saber o que os alunos entendiam e lembravam sobre funções e para nos ajudar a introduzir o conteúdo de funções. Logo após essa atividade inicial, disponibilizamos um vídeo de curta metragem, que tratou sobre a história das funções. Utilizamos, slides e o programa Miro para explicar cada definição e mostrar exemplos e exercícios. Por fim, disponibilizamos pelo Whatsapp todo o material utilizado durante a aula e fornecemos uma lista com exercícios para a consolidação do conteúdo tratado.

3.2.1 Plano de Aula 2

PLANO DE AULA
2º ENCONTRO – 13/03/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

- Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Compreender e analisar os gráficos da Função afim, entender os fundamentos, o conceito e os gráficos da Função quadrática por meio de exercícios e situações problemas utilizando as suas propriedades.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Função afim e quadrática, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Construir o conceito de gráficos e de Função quadrática utilizando situações problemas;
- Compreender a lei de formação de uma Função por meio de gráficos;
- Identificar e diferenciar funções de 1º e 2º grau;

- Conteúdo:

Gráfico de Função afim, definição de Função quadrática, gráfico de Função quadratica; Aplicações e resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet e o Software GeoGebra.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO(2h30)

Ao abordarmos o tema de funções, estamos adentrando a um leque de possibilidades a serem estudadas, dentre elas, temos a Função afim e a Função quadrática. Esses tipos de funções estão relacionados a diversos assuntos do nosso dia a dia, como por exemplo o preço de uma corrida de taxi.

Se em uma determinada corrida de taxi é cobrado R$ 5,00 mais R$ 4,50 por km rodado, podemos descrever uma Função para determinar o valor a ser pago por cada corrida, por exemplo $f(x) = 4{,}50x + 5$.

Tomando por base essas ideias, pretendemos que os alunos alcancem um bom conhecimento a respeito de funções enquanto suas aplicações às situações habituais do seu dia a dia. Na situação da construção de gráficos que estudaremos neste Plano de Aula, espera-se que o (a) aluno(a) observe as funções de forma visual.

É relevante destacar que as abordagens realizadas sobre esse tema também possibilitará que o(a) aluno(a) conheça diferentes softwares que são empregados na geração de gráficos, e como as formulações das funções estão relacionadas com os gráficos, tendo em vista que ambas esse relacionamento é essencial para o melhor entendimento do tema proposto.

A utilização de software nesta aula tem o objetivo a "otimização" do tempo da aula, buscando que ela seja produtiva e também que facilite o entendimento do aluno em relação a construção dos gráficos.

Em seguida, brevemente, recordaremos os conceitos explicados na aula anterior, inclusive resolvendo algumas questões do Anexo II apresentado como tarefa. Iremos introduzir o conceito de gráfico de Função afim, bem como Função quadrática, e suas características, aplicações e exemplos.

Iniciaremos nossa aula dois relembrando os conceitos de Função afim, bem como a sua lei de formação.

Relembrando...

Como foi visto na aula passada, uma Função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se Função afim quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, sendo a nossa taxa de variação ou coeficiente angular e b nosso termo constante ou coeficiente linear.

- Exercício 1)

(UNIOESTE – 2019 – Adaptada) Em determinado país, o imposto de renda I é calculado sobre a renda R de um cidadão segundo a seguinte fórmula: $I = Rt - D$, onde t é uma taxa ou porcentagem e D é um valor a deduzir. Os valores de t e D variam de acordo com o valor da renda do cidadão, conforme a tabela a seguir, expressa em unidades monetárias do país.

Tabela 1 - Imposto de Renda

Faixa de Renda (R)	Taxa (t) a ser aplicada	Dedução (D)
$0 \leq R < 3.000{,}00$	0	0
$3.000{,}00 \leq R < 5.000{,}00$	0,1	300,00
$5.000{,}00 \leq R < 10.000{,}00$	0,2	800,00
$R \geq 10.000{,}00$	0,25	1.300,00

Sobre o imposto I como Função da renda R de um cidadão deste país, é CORRETO afirmar.

a) Um cidadão que tem uma renda inferior a R$ 3.000,00 paga R$ 300,00 de imposto de renda.
b) Qualquer cidadão cuja renda R é tal que R$ 3.000,00 ≤ R ≤ R$ 5.000,00 paga o mesmo valor de imposto de renda.
c) Quanto maior a renda do cidadão, menor será o valor do imposto de renda a pagar porque a dedução é maior.
d) Um cidadão, cuja renda é de R$ 8.000,00, gasta efetivamente 10% de seu salário com imposto de renda.
e) A Função $I = I(R)$ é uma Função definida por parte, constantes em cada parte.

Resolução:

a) Não pois, cidadãos que recebem menos de R$ 3.000,00 não pagam impostos.
b) Não, se usarmos dois valores distintos já mostraremos que é falso.

$$I = 4000.0{,}1 - 300 = 100$$

e

$$I = 4900.0{,}1 - 300 = 190$$

c) Falso, pois a taxa aumenta conforme a renda aumenta. Vamos comparar, quando a renda é R$ 4000,00, o valor do imposto pago é de R$ 100,00. Quando o valor da renda for R$ 10.000,00 o valor do imposto a ser pago é:

$$I = 10000.0{,}25 - 1300$$
$$I = 1200$$

d) Verdadeiro, vamos analisar

$$I = 8000.0{,}2 - 800$$
$$I = 800$$

Como a renda é de R$ 8000,00, temos que 10% de R$ 8000,00 é R$ 800,00.

e) Falso, pois ela varia conforme a renda.

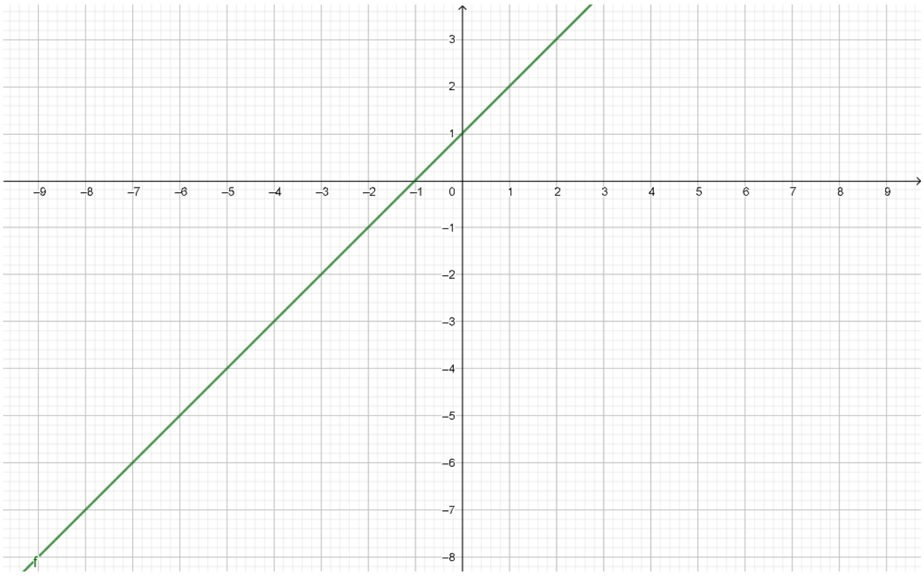
- Gráfico de uma Função afim: Assim como muitas outras funções, a Função afim possui um gráfico característico. Então vamos entender um pouco mais sobre ele e observar como é a sua representação.

$$f(x) = ax + b$$

A fórmula Matemática da Função afim possui dois coeficientes, ou seja, dois termos que assumem valores numéricos. O coeficiente angular a é o coeficiente que está junto da variável x, e o coeficiente linear b é o que chamamos de termo independente da Função.

O gráfico da Função afim f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ em que $a \neq 0$, é uma reta. O coeficiente de x, a, é chamado coeficiente angular ou declividade da reta e está ligado a sua inclinação em relação ao eixo x, o eixo das abscissas.

Figura 4 - Gráfico da Função $f(x) = x + 1$



Observe a Figura acima, gráfico da Função $f(x) = x + 1$, analisando os coeficientes temos que $a = 1\ e\ b = 1$.

- Calculando os coeficientes

É possível calcular o coeficiente angular da Função afim de diferentes formas. Graficamente, aplicando o conceito de taxa de variação quando dois pontos de uma reta são conhecidos, ou então, o ângulo de inclinação da reta com o eixo x.

A taxa de variação de uma Função afim nada mais é do que a razão entre a variação no eixo y e a variação correspondente no eixo x**.**

Dessa forma, para calcular o coeficiente angular de uma Função afim conhecendo apenas o gráfico desta Função, basta seguir os seguintes passos.

- Obter dois pontos da Função.
- Identificar qual é a variação do eixo y e do x, e obter a razão entre eles.

Observe a Figura 4, partindo do primeiro passo podemos obter dois pontos, $(0,1)$ e $(-1,0)$.

Fazendo a razão entre o eixo y e o eixo x temos:

$$a = \frac{0-1}{-1-0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Logo $a = 1$.

Substituindo um dos pontos, $(-1,0)$ na equação da reta temos:

$$0 = 1 + b$$

$$b = 1$$

Portanto, nossa equação da reta é $y = x + 1$

- Exemplo 1)

(FGV-SP- 2013- Adaptada) No plano cartesiano, a reta (r) intercepta o eixo x e y nos pontos $(5,0)$ e $(0,2)$; a reta (s) intercepta os eixos nos pontos $(1,0)$ e $(0,-1)$. Encontre a equação das retas (r) e (s).

Resolução:

Primeiro vamos encontra a equação das duas retas.

Temos que a reta (r) tem os pontos $(5,0)$ e $(0,2)$. Logo,

$$a = \frac{2 - 0}{0 - 5}$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

Substituindo um dos pontos $(5{,}0)$ na nossa equação $y = ax + b$,temos:

$$0 = -\frac{2}{5}.5 + b$$

$$0 = -2 + b$$

$$b = 2$$

Então, nossa reta (r) é

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

Agora vamos encontra a equação da reta (s), que tem os pontos $(1{,}0)$ e $(0, -1)$ logo,

$$a = \frac{-1 - 0}{0 - 1}$$

$$a = \frac{-1}{-1}$$

$$a = 1$$

Substituindo um dos pontos $(1{,}0)$ na nossa equação $y = ax + b$,temos:

$$0 = 1.1 + b$$

$$0 = 1 + b$$

$$b = -1$$

Então, nossa reta (r) é

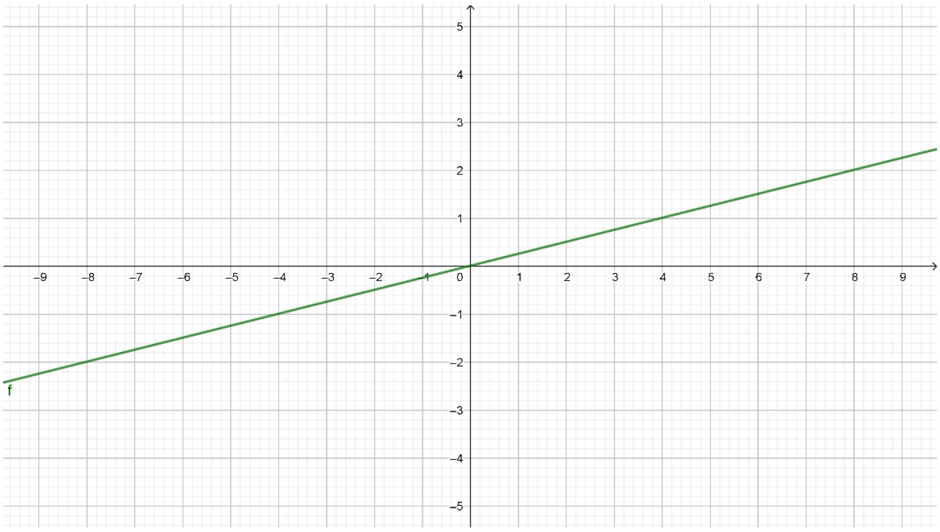
$$y = x - 1$$

- Tipos de Função afim: Para algumas situações ainda, podemos obter alguns tipos de Função afim, sendo elas:

- **Função linear:** Essa Função ocorre quando o coeficiente linear é igual a zero. Dessa forma, os elementos y e x são grandezas diretamente proporcionais entre elas.

$$f(x) = ax$$

Figura 5 - Variação da massa X volume de azeite



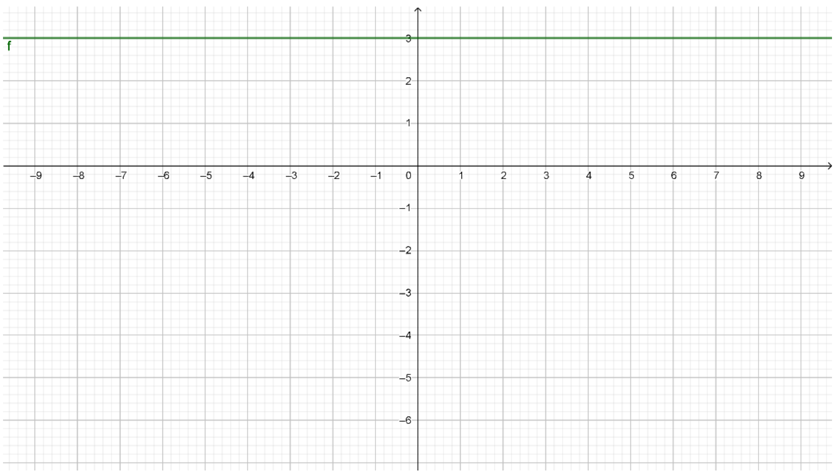
O gráfico acima, Figura 4, representa um exemplo de uma Função linear em que a massa de volume de um determinado azeite varia proporcionalmente, com a massa em relação ao eixo x e o volume, em y.

- **Função identidade**: Quando $a = 1$ e $b = 0$, a Função afim torna-se a Função identidade, em que $y = x$ para,

$$y = f(x)$$

- **Função constante:** Se tivermos $a = 0$ e $b = 0$ a Função afim torna-se a Função constante. Um exemplo disso pode ser visto no Gráfico a seguir, Figura 6, em que vale $f(x) = 3$.

Figura 6 - Gráfico da Função $f(x) = 3$



- Exemplo 1)

Duas retas (r) e (s) se interceptão num ponto P. A reta (r) é dada por, $f(x) = 2x + 3$, e a reta (s) intercepta os eixos x e y nos pontos, $(-\frac{5}{3}, 0)$ $(0{,}5)$.

a) Determine a equação da reta (s);

b) Determine o ponto P de interceção das duas retas;

c) Represente graficamente a reta (r) e a reta (s) e o ponto P.

Resolução:

a) Primeiro vamos encontra a equação da reta (s). Temos que a reta (s) passa pelos pontos $(-\frac{5}{3}, 0)$ $(0{,}5)$. Logo,

$$a = \frac{5 - 0}{0 + \frac{5}{3}}$$
$$a = \frac{5}{\frac{5}{3}}$$
$$a = 5 \,.\frac{3}{5}$$
$$a = 3$$

Substituindo um dos pontos $(-\frac{5}{3}, 0)$ na nossa equação $y = ax + b$,temos:

$$0 = 3\,.-\frac{5}{3} + b$$
$$0 = -5 + b$$
$$b = 5$$

Então, nossa reta (r) é $y = 3x + 5$

b) Agora, para encontramos o ponto P que as duas retas se encontram, basta igualarmos duas as retas.

$$2x + 3 = 3x + 5$$
$$-x = 2$$
$$x = -2$$

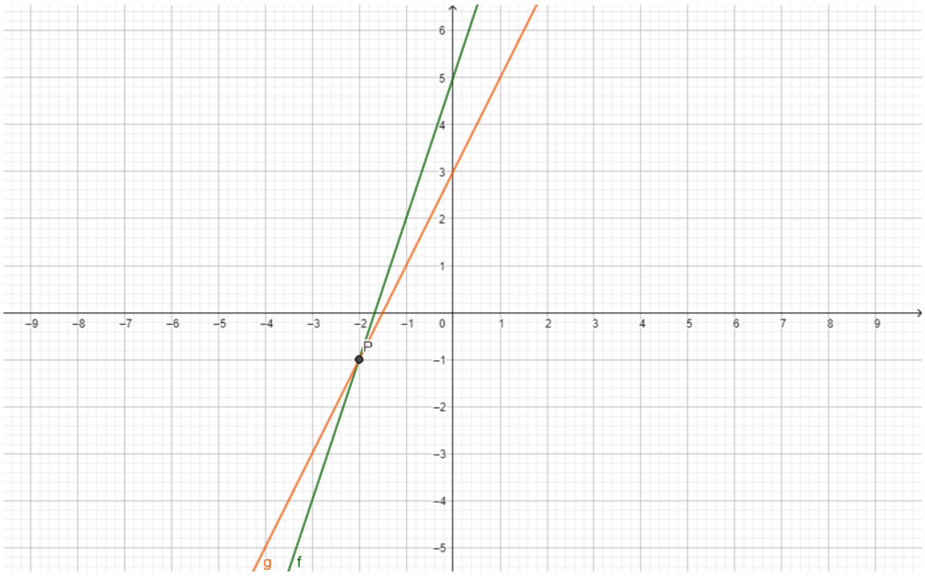
Agora substituindo $x = -2$ em uma das nossas equações, iremos encontrar a coordenada y.

$$3.(-2) + 5 = -1$$

Logo, o ponto P tem as coordenadas $(-2, -1)$.

c) Agora vamos representar as duas funções graficamente.

Figura 7 - Representação Gráfica das retas ; ; e s.



Após adentramos aos conceitos atestados anteriormente, acerca dos gráficos e da Função afim em específico, principiaremos o conceito de Função quadrática e seus respectivos conceitos e definições.

- Função Quadrática: Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta com tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.

Podemos ilustrar o problema com o retângulo, com dimensões por $100 - x$, pois o perímetro é de 200 metros.

$$P = 2x + 2y$$

$$200 = 2x + 2y$$

$$100 = x + y$$

$$x = 100 - x$$

Observe que a área do terreno a cercar é dada em Função da medida. Ou seja:

$$f(x) = (100 - x)x = 100x - x^2$$

Dizemos que a Função $f(x) = 100x - x^2$, é o modelo matemático para a situação apresentada.

- Definição de Função quadrática: Uma Função f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ em que $a = 1, b = -3$ e $c = 2$

$f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ em que $a = 2, b = 4$ e $c = -3$

- **Zeros (ou raízes) da Função quadrática:** Os zeros da Função quadrática são os valores de x que anulam a Função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, os zeros de $f(x)$ são os valores de x para os quais $ax^2 + bx + c = 0$

Note que $f(x) = ax^2 + bx + c$, é uma equação do segundo grau, portanto os valores de x que satisfazem essa condição são as mesmas raízes da equação do segundo grau.

Assim, temos a fórmula de Bhaskara que fornece as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Podemos escrever:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Observações:

i) Se $\Delta < 0$, a Função quadrática não tem raízes, pois não se pode calculara raiz quadrada do Δ negativo.

ii) Se $\Delta = 0$, temos $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0}$, Assim,

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b-\sqrt{0}}{2a}. \text{ Logo } x' = \frac{-b}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b}{2a}. \text{ Assim, } x' = x''.$$

Neste caso, $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$, logo a Função tem duas raízes reais e iguais.

iii) Se $\Delta > 0$, existe $\sqrt{\Delta}$ e, assim, obtemos:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Exercício 1)

Se a equação $3x^2 - 6x + (2k - 1) = 0$ tem duas raízes reais e diferentes, então o valor de *k* será?

a) $k < 2$

b) $k = 0$

c) $k > 2$

d) $k \notin \mathbb{R}$

Resolução:

Para uma equação do segundo grau apresentar duas raízes reais distintas, ela precisa ter um $\Delta > 0$, logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4.3.(2k - 1)$$

$$\Delta = 36 - 12.(2k - 1)$$

$$\Delta = 36 - 24k + 12$$

$$\Delta = 48 - 24k$$

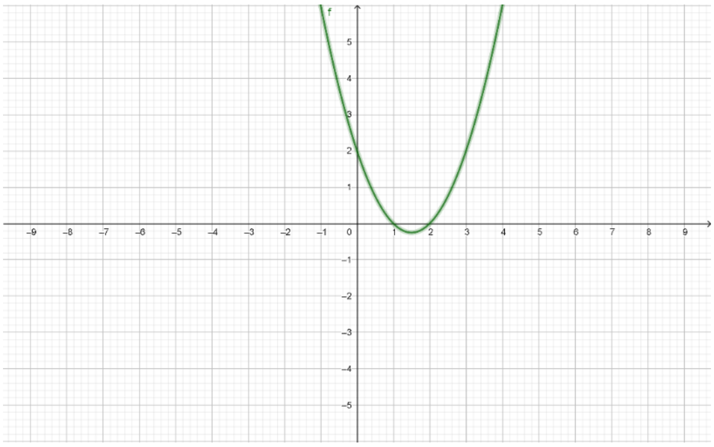
Então, temos

$$48 - 24k > 0$$
$$-24k > -48$$
$$k > -48/-24$$
$$k > 2$$

Logo, a resposta correta é a letra c).

- Gráfico de uma Função quadrática: A Função abaixo representa o gráfico de $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Figura 8 - Função $f(x) = x^2 - 3x + 2$.



Observe que a parábola intersecta o eixo x nos pontos 1 e 2 quais são as raízes da Função; e intersecta o eixo y no ponto 2, que representação o valor de c na Função quadrática.

Dada uma Função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ analisemos como os coeficientes a, b e c são relacionados ao gráfico da Função:

i) O coeficiente "a" está relacionado à concavidade da parábola. Ou seja, se $a > 0$ a concavidade da parábola está votada para cima. E, se $a < 0$, a concavidadeda parábola estará voltada para baixo.

ii) O coeficiente "b" indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola. Isto é, se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente; se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente; e, se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice da parábola.

iii) O coeficiente "c" é o ponto de interseção da parábola com o eixo y.

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da Função, bem como seu valor de máximo ou mínimo. O conjunto Imagem da Função é dado por:

$$\{y \in R;\ \exists\ X \in R\ , tal\ que\ f(x) = y\}$$

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

SILVA, H. L., Função quadrática: Investigar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à Função quadrática, UERJ, Rio de Janeiro, 2019, Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160470689>

TODA MATÉRIA, Função Afim, Disponível em <https://www.todamateria.com.br/funcao-afim/>; Acesso em 8 de fev. 2021.

GEEKIE GAMES, Conjuntos Numéricos | Resumo. Disponível em <https://geekiegames.geekie.com.br/blog/o-que-sao-conjuntos-numericos/>; Acesso em 8 de fev. 2021.

ANEXO 2 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Em cada Função quadrática dada a seguir, calcule o valor dos coeficientes desconhecidos:

a) $y = x^2 - bx + 7$, sendo $y = -1$ quando $x = 1$
b) $y = -2x^2 - bx + c$, sendo $y = -4$ quando $x = 1$ e $b + c = 4$.

2) (PUC-SP) A Função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida quando:

a) $m = 4$
b) $m \neq 4$
c) $m \neq \pm 2$
d) $m = \pm 2$

3) O gráfico da Função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, em que $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Determine y associado ao valor de $x = 2$.

4) Determine os pontos de intersecção da parábola da Função $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, com o eixo das abscissas.

Resoluções:

1)

a) De acordo com os dados, substituiremos $x = 1$ e $y = -1$ na equação $y = x^2 - bx + 7$, logo teremos,

$$-1 = 1^2 - b + 7$$
$$b = 7 + 1 + 1$$
$$b = 9$$

b) De acordo com os dados, substituiremos $y = -4, x = 1$ e $b + c = 4$ na equação $y = -2x^2 - bx + c$, logo teremos,

$$-4 = -2(1)^2 - b(1) + c$$
$$-4 = -2 - b + c$$
$$b - c = 2$$

Para, descobrirmos os valores de b e c, usaremos um sistema

$$b - c = 2$$
$$b + c = 4$$

Cancelando o c, obtemos:

$$2b = 6$$
$$b = 6/2$$
$$b = 3$$

Se $b = 3$ substituindo em $b + c = 4$, concluímos que $b = 3$ e $c = 1$

2) Uma Função quadrática está definida quando $a \neq 0$.

Como na Função dada $a = m^2 - 4$, temos:

$$m^2 - 4 \neq 0$$

$$m^2 \neq 4$$

$$m \neq \sqrt{4}$$

$$m \neq \pm 2$$

Logo, a resposta correta é a letra c).

3) Inicialmente, podemos concluir que o Δ dessa equação é igual a zero, uma vez que a parábola só intercepta o eixo das abscissas uma vez. Com isso, podemos escrever a seguinte equação:

$$\Delta = m^2 - 4\,.\,1\,.\,(m-1)$$
$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

Perceba que formamos outra equação do segundo grau. Aplicando a Fórmula de Bhaskara, podemos calcular as raízes dela. Assim, obtemos os seguintes valores:

$$m_1 = m_2 = 2$$

Uma vez que temos o valor de m, podemos completar a nossa equação e determinar o valor de y quando temos $x = 2$. Portanto:

$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$y = 2^2 - 2\,.\,2 + 1$$

4) Os pontos de intersecção da parábola com o eixo das abcissas são aqueles com $y = 0$. Logo, esses pontos equivalem às raízes da Função.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4\,.\,a\,.\,c$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4\,.\,2\,.\,1$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

Assim,

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Logo, os pontos são: $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(1, 0)$.

3.2.2 Relatório 2

No dia 13 (treze) de março de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o segundo encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet (https://meet.jit.si/promat_sala1).* A nossa lista de chamada é composta por 39 alunos, estando conectados 25 alunos. O grupo é formado por três alunos do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

A segunda aula do PROMAT, tratou sobre os fundamentos, conceitos e representação gráfica da Função afim e quadrática. Na maior parte da aula utilizamos o Software Geogebra, além do programa Miro para a resolução dos exercícios propostos e os slides para acompanhamento das explicações e definição do conteúdo.

Inicialmente, explicamos sobre a utilização do software Geogebra, caso os alunos quisessem utilizar ele em casa ou mesmo para ter conhecimento do software.

No decorrer da aula tivemos a participação da maior parte dos alunos, com questionamentos, dúvidas e alunos que trouxeram suas ideias para contribuir com a aula. No momento das explicações observamos que muitos alunos expressavam algumas dificuldades em relação a Matemática básica, pelo qual tivemos que realizar uma explicação minuciosa do conteúdo para sanar todas as dúvidas.

Por consequência dessa abordagem o tempo transcorreu freneticamente, e não conseguimos terminar o conteúdo como planejado. Restando algumas partes do conteúdo para serem explicadas na próxima aula.

Como em todo final de aula, disponibilizamos o material utilizado durante a atividade e fornecemos uma lista com exercícios para a consolidação do conteúdo abordado. A resolução da lista é disponibilizada aos alunos um dia anterior a aula, na sexta-feira, para que analisem as resoluções e caso tenham alguma dúvida elas poderão ser discutidas no sábado em horário específico aguardado por nós.

3.3.1 Plano de Aula

PLANO DE AULA
3º ENCONTRO – 20/03/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

- Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Compreender e analisar a linguagem algébrica e gráfica, os conceitos e definições de Domínio e Imagem e os tipos de funções que são dividas em injetora, sobrejetora, bijetora, e ainda caracterizar as funções como crescente, decrescente, par e impar, por meio de exercícios e situações problemas utilizando as suas propriedades.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Função, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar funções injetora, bijetora, sobrejetora, por meio de diagrama de flechas e gráficos;
- Esboçar gráficos de funções pares e ímpares;
- Classificar funções quanto ao seu crescimento ou decrescimento;
- Analisar e construir gráficos de funções crescentes e decrescentes;

- Conteúdo:

Linguagem algébrica e gráfica; Funções injetora, sobrejetora, bijetora, crescente, decrescente, par e impar; Aplicações e resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

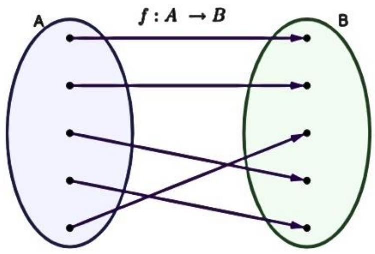
Aula expositiva e dialogada utilizando o Google Meet e software GeoGebra.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO (2h30)

- Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem: A Função é uma relação entre dois conjuntos A e B, em que, para todo elemento do conjunto A, existe um único correspondente no conjunto B.

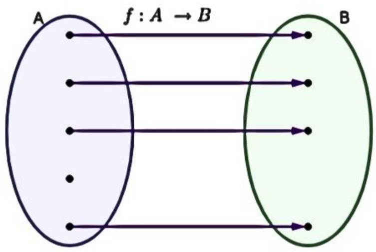
Perceba que na Função os valores do conjunto A, conhecido como domínio, são relacionados aos seus correspondentes no conjunto B, conhecido como contradomínio, dependendo do comportamento dessa Função, o que conhecemos como lei de formação.

Figura 9 - Conjuntos Domínio e Contra Domínio



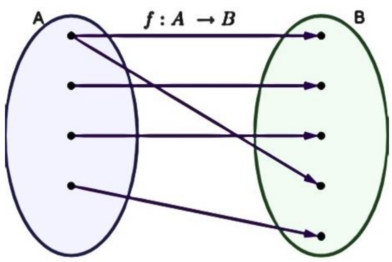
A Figura acima trata-se de uma Função, pois satisfaz a definição, todo elemento de A possui um único correspondente em B.

Figura 10 – Diagrama de Flechas em uma Relação



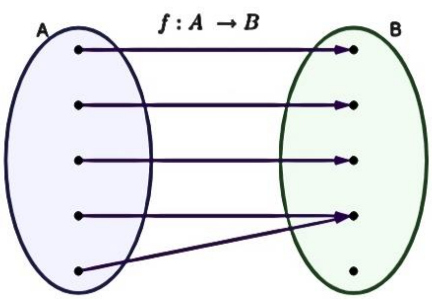
Já a Figura 10 não se trata de uma Função, pois há elementos no domínio que não possuem correspondente em B, o que contradiz a definição.

Figura 11 - Diagrama de Flechas em uma Relação



A Figura 11 também não é uma Função, pois há elementos do conjunto A que possuem dois correspondentes no conjunto B, o que contradiz a definição.

Figura 12 - Função definida



Já a Figura 12 trata-se de uma Função, pois as restrições são para o domínio, ou seja, o conjunto A não tem problema algum caso sobre elementos no contradomínio ou caso exista um elemento de B correspondente a dois elementos distintos em A.

- Domínio da Função: Dada uma Função qualquer, o domínio é formado pelos valores que o x pode assumir. Na maioria das vezes, o domínio é o conjunto dos números reais e o contradomínio também, entretanto, pode ser que haja algumas restrições para o domínio.

- Contradomínio

O contradomínio de uma Função $f: A \rightarrow B$ é o conjunto B.

O conjunto domínio de todo elemento tem que ter necessariamente um correspondente no contradomínio, porém não há uma restrição para o contradomínio, logo, o conjunto pode ter elementos que não sejam correspondentes de ninguém no domínio, um exemplo seria a Função $f(x) = x^2$ com $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Conforme essa Função, a imagem da mesma nunca será negativa, para todo valor de x , x^2 sempre será um número positivo, e o contradomínio é todos os números reais.

- Imagem

O conjunto imagem da Função é um subconjunto do contradomínio formado por todos os elementos correspondentes de algum elemento do domínio.

- Crescimento e decrescimento de uma Função: Vamos analisar as seguintes situações:

O gráfico abaixo, Figura 13, mostra a população brasileira de 1872 a 2010.

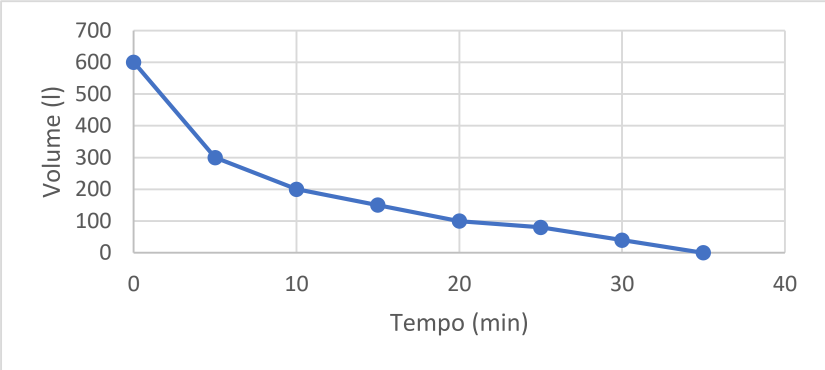
Figura 13 - Evolução da População residente no país

Neste gráfico podemos perceber que a população está aumentando em Função do aumento do tempo (anos), logo a curva é denominada ‘’crescente ‟.

Diz-se que f é crescente, se para $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

O gráfico seguinte mostra um tanque sendo esvaziado.

Figura 14 - Volume de água em Função do tempo



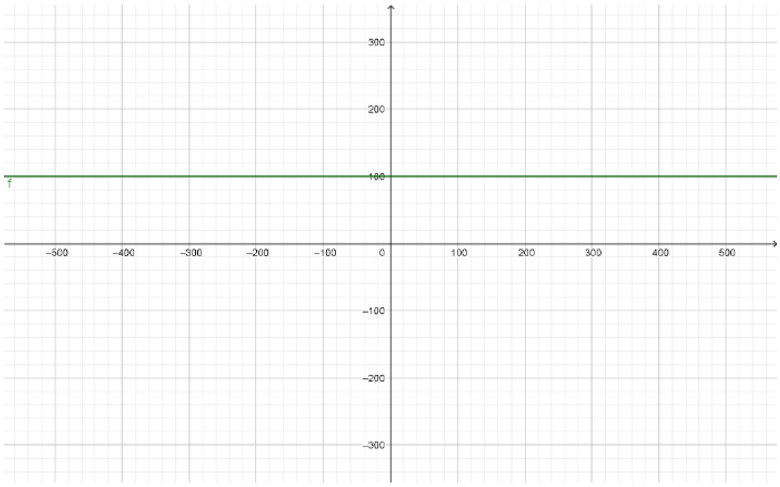
Fonte: Autor (2021)

Pelo gráfico notamos a diminuição do volume de água (litros) em Função do aumento de tempo (minutos), portanto a curva é ‘’decrescente‟.

Diz-se que g é decrescente, se $a < b$ então $g(a) > g(b)$

A Função constante os valores da imagem permanecem inalterados, mesmo aumentando os valores da variável independente.

Figura 15 - Função $f(x) = 100$



- Exemplo 1)

Seja a Função real dada por $f(x) = 2x + 1$. Para analisar se essa Função é crescente ou decrescente, vamos representá-la graficamente.

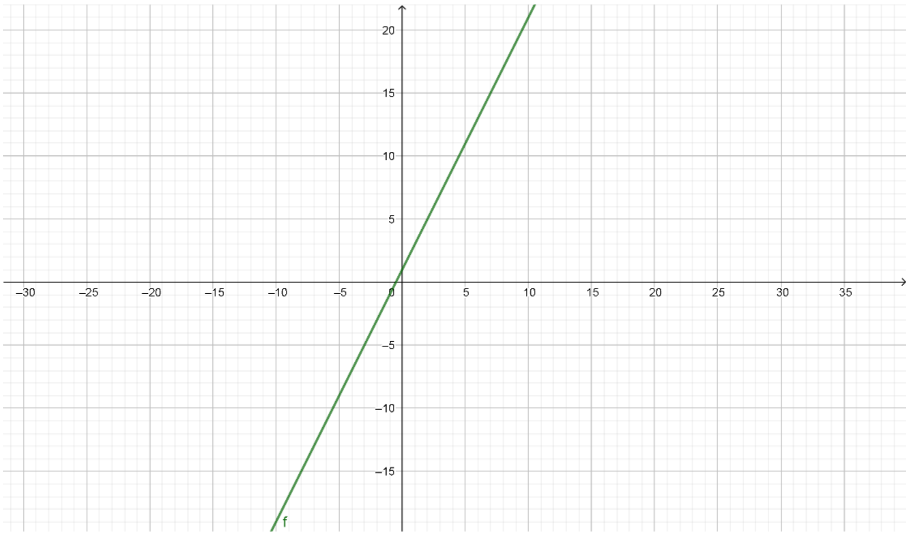
Atribuindo a x alguns valores reais e substituindo na Função dada, obtemos suas respectivas imagens.

Tabela 2 - $f(x) = 2x + 1$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$	$\boldsymbol{y}$
-2	$f(-2) = 2.(-2) + 1$	-3
-1	$f(-1) = 2.(-1) + 1$	-1
0	$f(0) = 2.0 + 1$	1
1	$f(1) = 2.1 + 1$	3

Agora, iremos construir o gráfico da Função.

Figura 16 - Gráfico da Função $f(x) = 2x + 1$



Podemos notar que, ao aumentarmos os valores atribuídos a x, os valores das imagens correspondentes em y também aumentam. Nesse caso, dizemos que a Função f é crescente em $\mathbb{R}$.

- Exemplo 2)

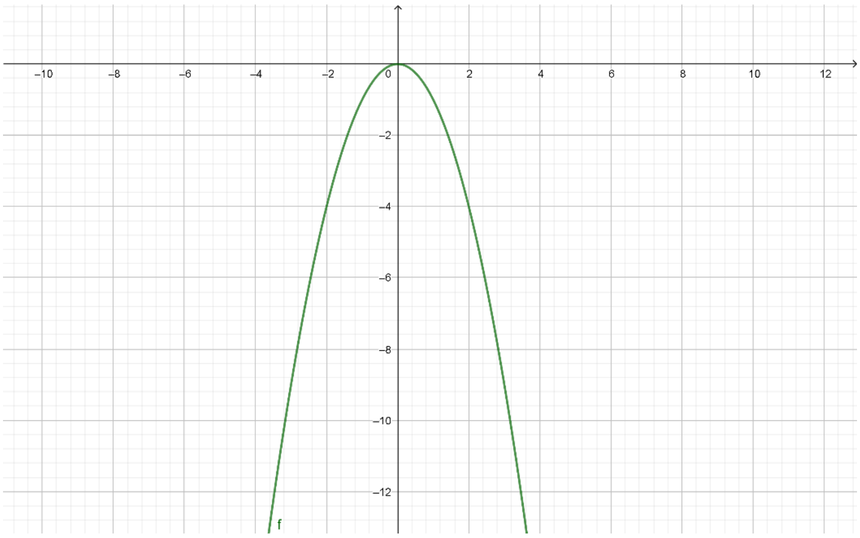
Veja o gráfico da Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2$

Tabela 3 - $f(x) = -x^2$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = -x^2}$	$\boldsymbol{y}$
-2	$f(-2) = -(-2)^2$	-4
-1	$f(-1) = -(-1)^2$	-1
0	$f(0) = -(0)^2$	0
1	$f(1) = -(1)^2$	-1
2	$f(2) = -(2)^2$	-4

Traçando o gráfico temos:

Figura 17 - Gráfico da Função $f\ (x)\ =\ -x^2$



Nesse gráfico podemos perceber que:

- Para $x\ \leq\ 0$, essa Função é crescente;
- Para $x\ \geq\ 0$, essa Função é decrescente;
- Para $x\ =\ 0, f(x)\ =\ 0$; para $x\ \neq\ 0$, temos $f(x)\ <\ 0$. Por isso, dizemos que 0 é o ponto de máximo a Função.

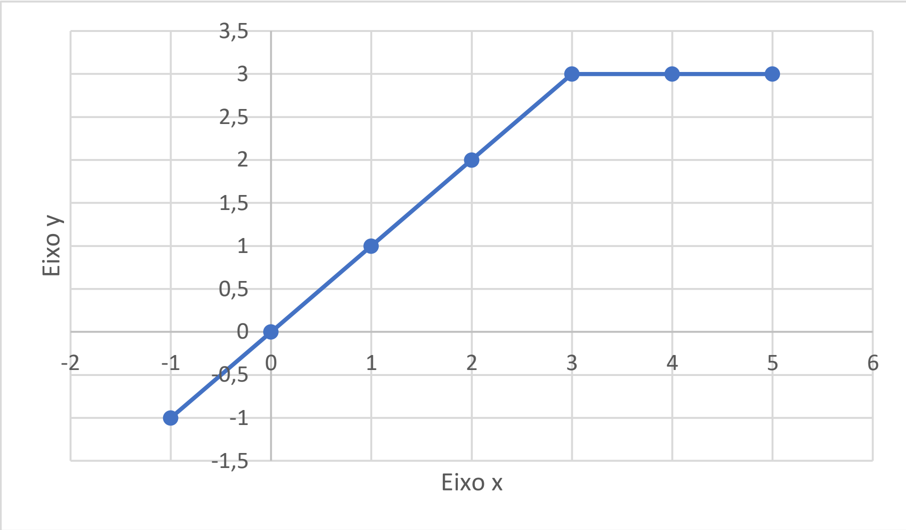
- Exemplo 3)

Observe o gráfico da Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dado por $f\ (x)\ = \begin{cases} x, se\ x\ \leq\ 3 \\ 3, se\ x\ >\ 3 \end{cases}$

Tabela 4 - Valores para x e $f(x)$

x	y
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	3
5	3

Figura 18 - Gráfico referente ao exercício 3



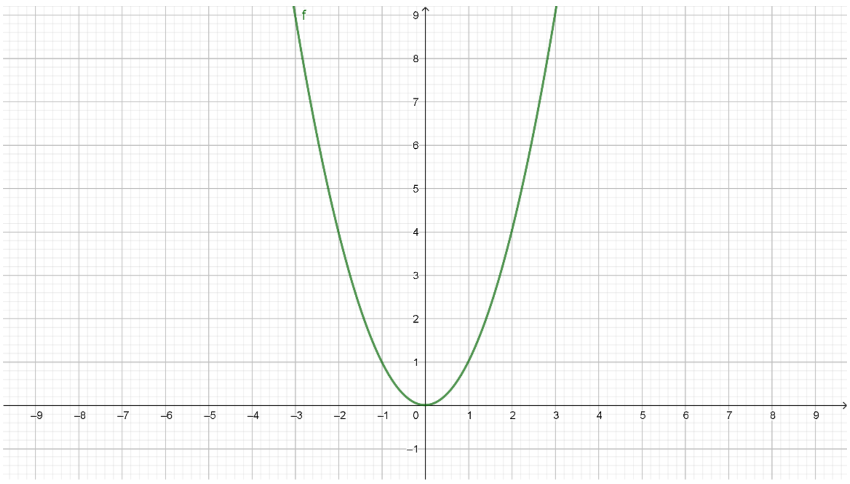
Veja que:

- Para $x \leq 3$, essa Função é crescente;
- Para $x > 3$, essa Função e constante;
- Para $x < 0, f(x) < 0$;
- Para $x = 0, f(x) = 0$;
- Para $x > 0, f(x) > 0$.

- Função Par: f é Função par, para o Domínio (D), se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, para qualquer $x \in D$, em que o domínio é simétrico em relação à origem, ou seja, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

Consideremos a Função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Figura 19 - Gráfico da Função $f(x) = x^2$



Observe que:

$f(1) = 1^2 = 1$
$f(-1) = (-1)^2 = 1$, ou seja, $f(1) = f(-1)$, logo 1 e -1 possuem a mesma imagem.

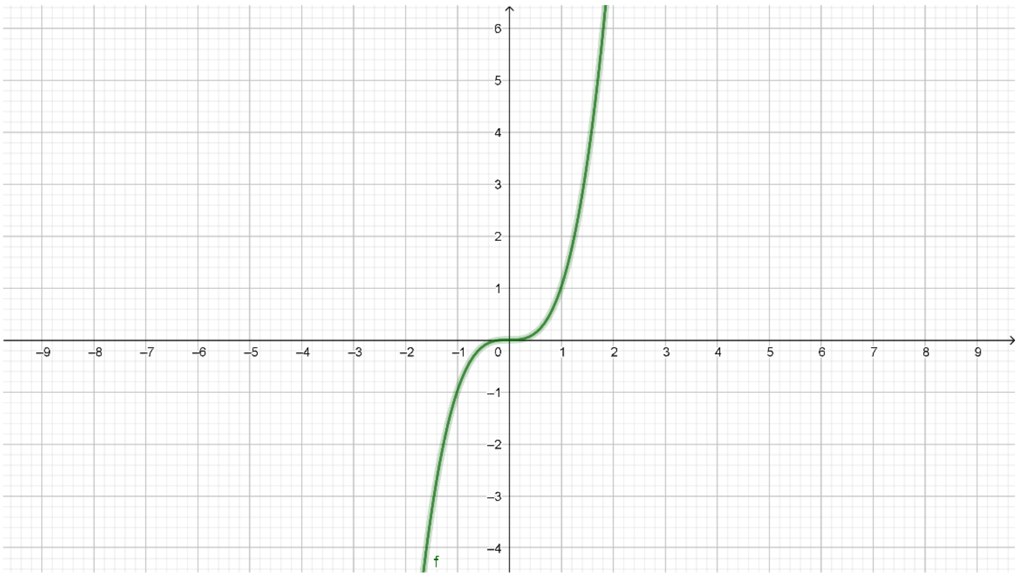
$f(2) = 2^2 = 4$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$, ou seja, $f(2) = f(-2)$, logo 2 e -2 possuem a mesma imagem.

- Função Ímpar: f é Função ímpar, para o Domínio (D), se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$, onde o domínio é simétrico em relação a origem e o gráfico também é simétrico em relação a origem O.

O gráfico da Função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, demonstra a simetria.

Figura 20 - Gráfico da Função $f(x) = x^3$



Por meio do gráfico acima, Figura 20, pode-se observar que:

$f(1) = 1^3 = 1$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$, ou seja, $f(1) = -f(-1)$, logo 1 e -1 possuem imagens opostas.

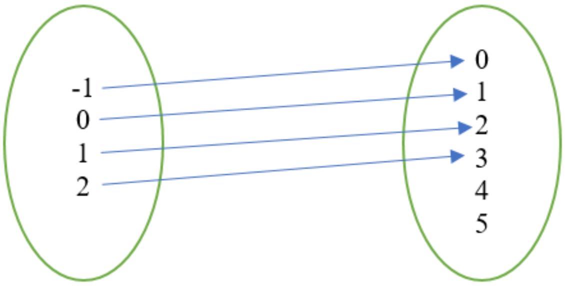
$f(2) = 2^3 = 8$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$, ou seja, $f(2) = -f(-2)$, logo 2 e -2 possuem imagens opostas.

- Função Injetora: Diz-se que f é injetora se, e somente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

O diagrama abaixo representa a Função $f : A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 1$. Observe que f associa elementos distintos de A a elementos distintos de B. Portanto f é injetora.

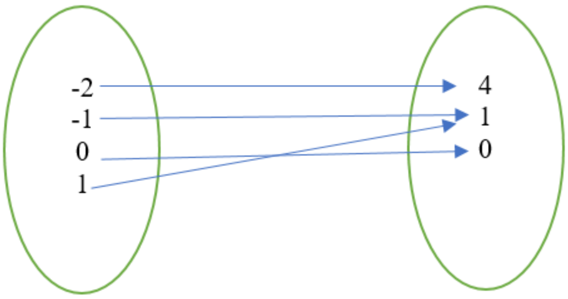
Figura 21 - Diagrama de Flechas de $f(x) = x + 1$



- Função Sobrejetora: Uma Função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora quando, para qualquer elemento $y \epsilon B$, pode-se encontrar um elemento $x \epsilon A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, $Im = CD$.

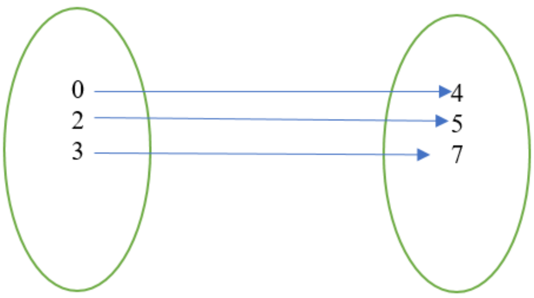
O diagrama abaixo representa a Função $f : A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x^2$. $Im = \{0, 1, 4\}\ e\ CD = \{0, 1, 4\}$

Figura 22 - Diagrama de Flechas de $f(x) = x^2$



- Função Bijetora: Diz-se que f é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora simultaneamente. Considere o seguinte diagrama que representa a Função $f : A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 2x + 1$. De acordo com o que vimos anteriormente, a Função f é, ao mesmo tempo, sobrejetora e injetora. Logo é uma Função bijetora.

Figura 23 - Diagrama de Flechas de $f(x) = 2x + 1$



- Função Inversa: Dada uma Função $f : A \to B$, bijetora, denomina-se Função inversa de f a Função $g : B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Para representar a Função inversa de f, utilizamos o símbolo f^{-1} .

Exemplificando no diagrama de flechas:

$$f : A \to B$$

$$g : B \to A$$

De modo geral, se f é bijetora, temos que $g : B \to A$ é a Função inversa da Função $f : A \to B$, uma vez que se tem $g(y) = g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

- Determinando a Função inversa e construindo seu gráfico

Caso a Função seja bijetora, e, portanto, invertível, é possível determinar a sua inversa. Para isso "trocamos" a variável x por y na lei que define a Função e em seguida "isolamos" o y, obtendo a lei que define a Função inversa, conforme exemplos:

- Exemplo 5)

Obter a lei da Função inversa da Função f dada por $y = x + 2$.

Resolução:

$$y = x + 2$$

$x = y + 2$, trocando y por x e x por y

$$y = x - 2$$

Então, $y = x - 2$ é a lei da Função inversa da Função dada por $y = x + 2$.

Desse, vamos construir os gráficos das funções f e f^{-1} num mesmo sistema de coordenadas:

Tabela 5 - Valores para x e $f(x)$

x	$f(x)$
-1	1
0	2
1	3
2	4

Tabela 6 - Valores para x e f^{-1}

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f^{-1}}$
1	-1
2	0
3	1
4	2

Figura 24 - Gráfico da Função $y = x + 2$

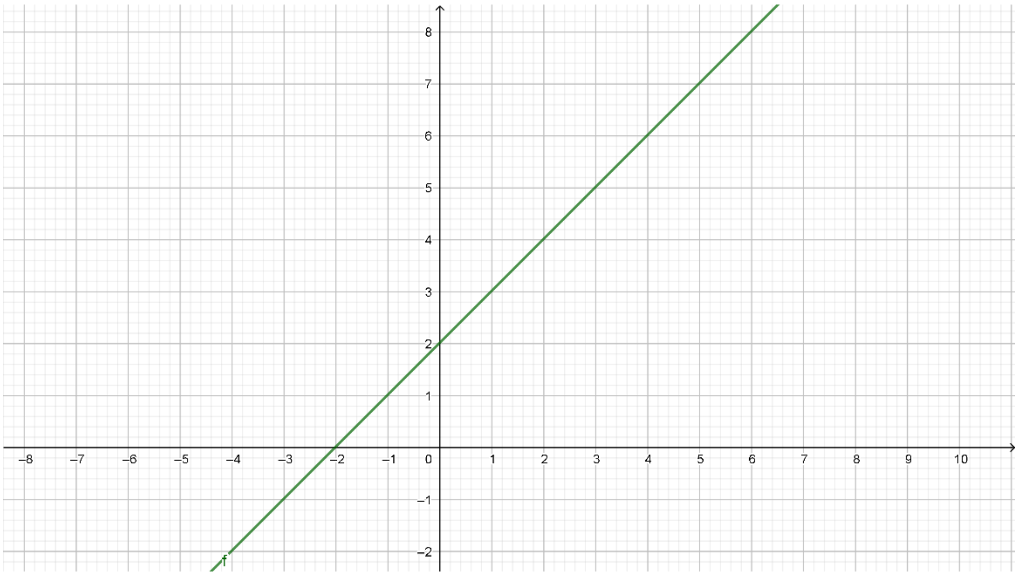
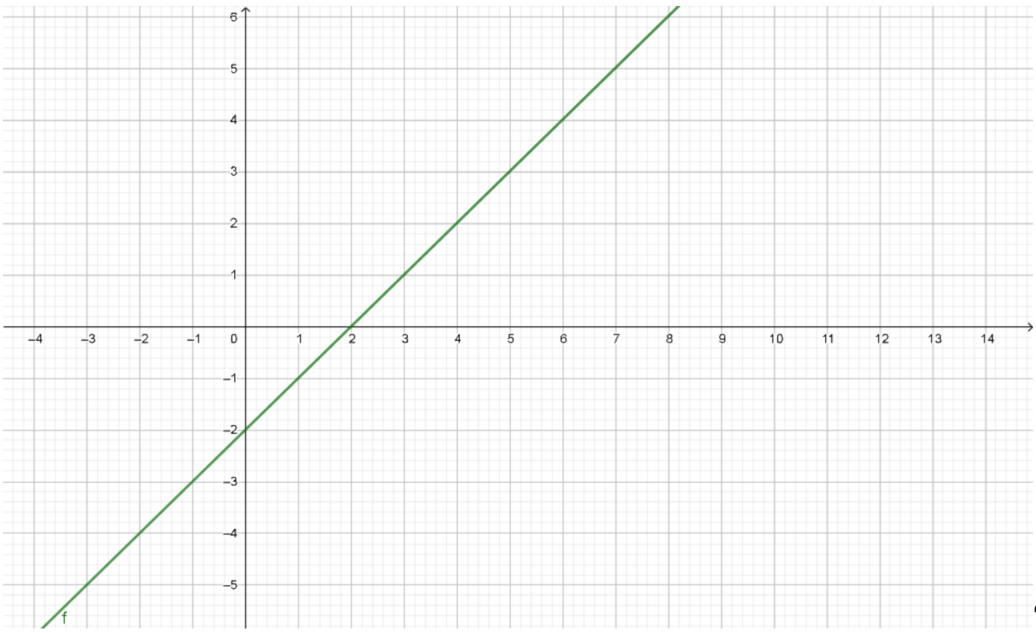


Figura 25 - Gráfico da Função $y = x - 2$



- Exemplo 6)

Determinar a Função inversa da Função $g(x) = \frac{x+5}{2x-3}$, cujo domínio é $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Resolução:

Temos a Função

$$y = \frac{x+5}{2x-3}$$

Trocando as variáveis temos,

$$x = \frac{y+5}{2y-3}$$

$$x(2y - 3) = y + 5 \rightarrow 2xy - 3x = y + 5$$

$$2\mathrm{xy} - \mathrm{y} = 3\mathrm{x} + 5 \rightarrow \mathrm{y}(2\mathrm{x} - 1) = 3\mathrm{x} + 5$$

$$\mathrm{y} = \frac{3\mathrm{x}+5}{2\mathrm{x}-1} \;;\; 2\mathrm{x} - 1 \neq 0 \rightarrow \mathrm{x} \neq \frac{1}{2}$$

Logo, $g^{-1}(\mathrm{x})\colon \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ dada por $y = \frac{3\mathrm{x}+5}{2\mathrm{x}-1}$ é a Função inversa procurada.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. Volume 1 Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2012

GIOVANI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa. 1ª série Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2005

ANEXO 3 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Sobre funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, julgue os itens abaixo em verdadeiro ou falso.

I. Toda Função injetora é bijetora

II. Quando elementos diferentes geram imagens diferentes, temos uma Função sobrejetora.

III. Toda Função bijetora admite inversa.

IV. Quando a imagem é igual ao contra dominio, temos uma Função sobrejetora.

a) VVVV

b) FFVV

c) VVFF

d) FFFF

Resolução:

I – Falso

Uma Função pode ser injetora, porém existir um elemento no contradomínio que não esteja associado a um elemento do domínio, fato este que tornaria a Função não sobrejetora e consequentemente não bijetora.

II – Falso

O fato do elemento do domínio estar associado a um elemento igual ou diferente no contradomínio não é determinante na classificação das funções.

III – Verdadeiro

Uma Função é bijetora se e somente se possui uma Função inversa.

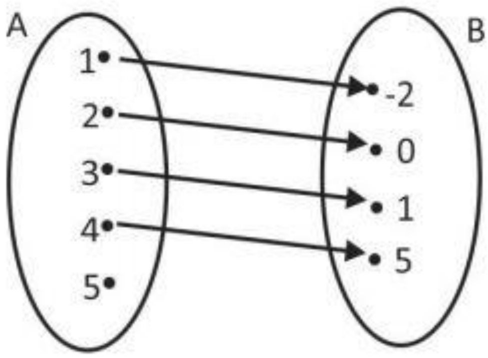
IV – Verdadeiro

Se o contradomínio e a imagem são iguais, então todo elemento do contradomínio está associado a pelo menos um elemento do domínio e essa Função é sobrejetora.

Logo, a resposta é a letra b).

2) (Eletrobrás 2014 - Adaptada). Na figura a seguir está evidenciada, através de setas, uma relação entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B.

Figura 26 - Diagrama de Flechas com A e B



A respeito desta relação é correto afirmar que:

a) não é uma Função.
b) é uma Função que não é injetora nem sobrejetora.
c) é uma Função injetora, mas não sobrejetora.
d) é uma Função sobrejetora, mas não injetora.
e) é uma Função bijetora.

Resolução:

Se o candidato se concentrar apenas no conjunto B, vai marcar de cara que é uma Função bijetora pois cada elemento de B está associado a um, e apenas um, elemento de A.

A pegadinha está no elemento 5 do conjunto A, pois para ser uma Função, cada elemento do conjunto A deve estar associado a um, e apenas um, elemento do conjunto B.

Logo, a resposta é a letra a).

3.3.2 Relatório 3

No dia 20 (vinte) de março de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o terceiro encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet* (https://meet.jit.si/promat_sala1). A lista de chamada é composta por 39 alunos, no início da aula haviam conectados 22. Nosso grupo é formado por três alunos do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

Em primeiro momento, observamos que a quantidade de alunos em cada aula, estava diminuindo, o que não afetaria o desenvolvimento do PROMAT.

A terceira aula do projeto, sucedeu-se sobre a linguagem algébrica e gráfica dos tipos de funções, sendo elas, Função constante, crescente e decrescente, Função ímpar e par, Função injetora, sobrejetora e bijetora e Função inversa, além da explicação de domínio, imagem e contradomínio.

Como não havíamos terminado todas as discussões na aula anterior, iniciamos a terceira aula retomando as definições e exercícios não abordados, e que utilizaríamos nesta terceira aula.

Nesta aula, em sua maior parte, utilizamos o Software Geogebra, além do programa Miro para a explicação dos exercícios que foram propostos em aula, utilizamos o Geogebra principalmente para o auxílio com os gráficos das funções, para a melhor visualização dos alunos.

Nesta aula tivemos a participação de uma parte dos alunos, principalmente em relação a construção dos gráficos. Surgiram algumas dúvidas sobre plano cartesiano, coordenadas, pontos no gráfico, e com a ajuda do Geogebra foram todas sanadas.

Tendo em vista que no início da aula foram feitas algumas revisões a respeito do conteúdo da aula anterior, não conseguimos terminar o conteúdo como planejado. Dessa forma, restaram partes do conteúdo a serem abordadas na aula posterior.

Ao final de aula, disponibilizamos através do Whatsapp o material utilizado durante toda a aula e fornecemos ainda, uma lista com exercícios para a consolidação do conteúdo tratado. Ainda, a resolução da lista de exercícios é disponibilizada aos alunos um dia anterior a aula, na sexta-feira, para que façam a conferência dos resultados, e caso haja dúvidas referente aos exercícios, essas sejam sanadas na próxima aula.

3.4.1 Plano de Aula

PLANO DE AULA

4º ENCONTRO – 27/03/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino -NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Objetivo Geral:

Compreender a definição de polinômios, identificar suas aplicações e resolver exercícios envolvendo o conteúdo e suas propriedades.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com polinômios, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Distinguir a parte numérica (coeficiente) e a parte literal (variável) de um monômio;
- Determinar o grau de um polinômio a uma variável;
- Utilizar polinômios em situações-problemas;
- Determinar a soma, a diferença, multiplicação e divisão de polinômios;
- Operar com polinômios;

- Conteúdo:

Polinômios; Aplicações e Resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet, SoftwareGeoGebra e outros sites para participação conjunta.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO
(2h30)

Os polinômios, a priori, formam um plano conceitual importante na Álgebra, entretanto possuem também uma relevante importância na Geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos.

A definição de polinômio é geral o suficiente para considerar apenas algumas situações simples, a exemplo dos termos $2x, y, 4z, 2, 5$, entre outros. E então como se pode notar, polinômios pode ser compostos de distintas formas, desde aquelas que envolvem apenas números até as formulações que apresentem expressões, potências, coeficientes, entre outros termos. No caso geral a definição de polinômio considera n termos, a exemplo de $p(x) = a_n\, x_n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_2\, x_2 + a_1\, x + a_0$.

Como se pode notar, polinômios são compostos pelas várias expressões algébricas, desde aquelas que envolvem apenas números, até as que apresentam diversas letras, potências, coeficientes, entre outros elementos dos polinômios.

Antes de introduzirmos o conceito de polinômios, iremos fazer a definição de alguns conceitos para ficar mais claro o entendimento do assunto.

- Monômio: Um monômio é uma expressão algébrica formada por um número e uma letra. O número é chamado de coeficiente do monômio e a letra, a sua parte literal.

- Exemplo 1)

$-4x^3$ onde o coeficiente vale -4 e a parte literal x^3.

- Binômio: Chamamos de binômio toda expressão algébrica que é formada por dois monômios, isto é, possui dois termos. Um termo é separado por outro por meio de uma operação de soma ou de subtração.

- Exemplo 2)

$-2xy + 3y^2$

- Trinômio: Um trinômio é uma expressão algébrica que possui três termos, ou seja, ela é formada por três monômios.

- Exemplo 3)

$3xy + xy^2 - 4x$

- Polinômio: Um polinômio é uma expressão algébrica formada por um ou mais termos, ou seja, monômio, binômio e trinômios são tipos de polinômios, as expressões algébricas que possuem mais de três monômios não recebem nomes particulares.

Em geral, estudamos polinômios com uma única variável, como a exemplo $4x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, e a esse polinômio, associamos uma Função que chamamos de Função polinomial.

$$p(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

- Grau de um polinômio: Chamamos de grau de um polinômio o maior número inteiro de um expoente cujo coeficiente é não-nulo, isto é, é diferente de zero.

Tomando-se novamente o polinômio $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ temos que o seu grau vale 3, pois ele é o maior expoente cujo coeficiente (que é igual a 4) é diferente de zero. Já o polinômio $p(x) = 2x + 1$, tem grau um, enquanto que o polinômio $p(x) = 2$ tem grau zero.

- Exercício 1)

Determine o grau dos polinomios a seguir.

a) $3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 1$

b) $-2x^2 + 1$

c) $3x + 4$

d) $6x^6 + 4x^3 - 28x^2 + 3x + 5$

Resolução:

a) temos que o seu grau vale 4, pois ele é o maior expoente cujo coeficiente (que é igual a 3) é diferente de zero.

b) temos que o seu grau vale 2, pois ele é o maior expoente cujo coeficiente (que é igual a -2) é diferente de zero.

c) temos que o seu grau vale 1, pois ele é o maior expoente cujo coeficiente (que é igual a 3) é diferente de zero.

d) temos que o seu grau vale 6, pois ele é o maior expoente cujo coeficiente (que é igual a 6) é diferente de zero.

- Grau de um polinômio com mais de uma variável: É importante ressaltar que a definição de grau de um polinômio que, fora dada acima, só vale para polinômios de uma única variável.

Para polinômios de mais de uma variável, a fim de determinarmos o seu grau devemos somar os expoentes das partes literais e tomar o maior valor. Por exemplo, o polinômio $x^2y + 3x^2y^3 - 4xy$ tem grau 5, pois a soma dos expoentes do 1º, 2º e 3º termos são iguais a, respectivamente, 3, 5 e 2.

- Exercício 2)

Determine o grau dos polinomios a seguir.

a) $2x^4y^3 - 2x^2y$

b) $-2x^2y^2 + x^6$

c) $7x^3z^7 + 4$

d) $6x^6z^3y^2 + 3x$

Resolução

a) temos que o seu grau vale 7, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente, 7 e 3

b) temos que o seu grau vale 6, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente, 4 e 6

c) temos que o seu grau vale 10, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente, 10 e 0

d) temos que o seu grau vale 11, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente,11 e 1

- Valor numérico de um polinômio: O valor numérico de um polinômio é obtido a partir da substituição da variável por um número. Assim, tomando o polinômio $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 1$, o seu valor numérico para $x = 2$ é dado por:

$$p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 1$$

$$p(2) = 4.2^3 - 2.2^2 - 2 + 1$$

$$p(2) = 23$$

- Raiz de um polinômio: Definimos como raiz (ou zeros) de um polinômio, como sendo o valor que a variável assume de modo que o valor numérico do polinômio seja igual a zero, isto é, x será raiz de $p(x)$ se $p(x) = 0$.

Por exemplo, tomando-se o polinômio:

$$p(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 + x - 2$$

temos que $x = 2$ é uma raiz, tal que

$$p(2) = \frac{2^3}{2} - 2^2 + 2 - 2 = 0$$

- Exercício 3)

Encontre os valores númericos dos polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 4$ e diga se é ou não a raiz do polinômio.

a) $p(2) =$
b) $p(1) =$
c) $p(0) =$

Resolução:

a) $p(2) = 2^2 - 5.2 + 4 = 10$

b) $p(1) = 1^1 - 5.1 + 4 = 0$. Logo, 1 é raiz do polinômio.

c) $p(0) = 0 - 0 + 4 = 4$

- Operações entre polinômios: Podemos operar polinômios de três formas, pela adição, subtração e multiplicação.

- Monômios semelhantes: Monômios semelhantes são aqueles que possuem a parte literal iguais entre si. Por exemplo, os monômios $4x^2y$ e $-3x^2y$ são semelhantes. Já os monômios $-5x^2y$ e $10xy^2$ não são semelhante entre si.

Quando somamos ou subtraímos monômios, só iremos fazer tais operações entre monômios semelhantes, de modo que mantemos a parte literal e trabalhamos com os coeficientes. Assim, $4x^2y + (-3x^2y) = 4x^2y - 3x^2y = 1x^2y$ e $4x^2y - (-3x^2y) = 4x^2y + 3x^2y = 7x^2y$.

Já entre dois monômios não semelhantes, não há o que se fazer em termos de adição e subtração. Podemos multiplicar monômios que são (ou não) semelhantes entre si. Seguimos os seguintes passos:

- Multiplicaremos os números;

- Multiplicaremos as letras iguais entre si usando a propriedade de multiplicação e potência de mesma base.

- Exemplo 4)

$2x^3 . 3x^2$

Primeiramente, multplicamos os números, $2.3 = 6$;

Em seguida multiplicaremos as letras iguais, nesse caso, usaremos a propriedade de multiplicação e potência de mesma base, logo, mantemos a base e somamos os expoentes, $x^3 . x^2 = x^{3+2} = x^5$. Assim, obtemos: $2x^3 . 3x^2 = 6x^5$

- Soma de polinômios: Para somarmos dois (ou mais) polinômios, basta reduzirmos os termos semelhantes.

- Exemplo 5)

$$p_1(x) = 3x^2 + 2 \text{ e } p_2(x) = 4x^2 - 5x + 3$$
$$p_1(x) + p_2(x) = 3x^2 + 2 + 4x^2 - 5x + 3$$
$$p_1(x) + p_2(x) = 7x^2 - 5x + 5$$

- Diferença entre polinômios: A diferença entre polinômios ocorre de maneira análoga ao processo de soma de polinômios.

Tomando-se assim os polinômios $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$ como acima, temos que:

$$p_1(x) - p_2(x) = 3x^2 + 2 - (4x^2 - 5x + 3)$$
$$p_1(x) + p_2(x) = 3x^2 + 2 - 4x^2 + 5x - 3$$
$$p_1(x) + p_2(x) = -x^2 + 5x - 1$$

- Multiplicação de polinômios: A multiplicação de polinômios consiste-se na aplicação da propriedade distributiva e, por fim, na redução de termos semelhantes:

$$(p_1 . p_2)(x) = (3x^2 + 2).(4x^2 - 5x + 3)$$
$$(p_1 . p_2)(x) = 12x^4 - 15x^3 + 9x^2 + 8x^2 - 10x + 6$$
$$(p_1 . p_2)(x) = 12x^4 - 15x^3 + 17x^2 - 10x + 6$$

- Exercício 4)

Reduzindo-se os termos da expressão $b(a - b)b + (b + a)(b - a) - a(b - a) + (b - a)^2$, obtém-se:

a) $(a - b)^2$
b) $(a + b)^2$
c) b^2-a^2
d) $a^2 - b^2$

Resolução:

$$ba - b^2 + b^2 - ba + ab - a^2 - ab + a^2 + b^2 - 2ba + a^2$$

$$a^2 - 2ba + b^2$$

$$(a - b)^2$$

Logo, resposta correta é a letra a).

-Exercício 5)

Calcule o valor numérico do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 - 4$, para $x = 2$

$$p(2) = \ 2^3 - 7.2^2 - 4$$

$$p(2) = 8 - 7.4 - 4$$

$$p(2) = 8 - 28 - 4$$

$$p(2) = -24$$

- Exercício 6)

Calcule os seguintes polinômios.

a) $\mathrm{p(x)} = \ 3x^3 \ + \ 2\mathrm{x} \ + \ 1 \ e \ \mathrm{q(x)} = \ -2x^3 + \ \mathrm{x} - \ 4.$

b) $p(x) = 2x^2 + 4x \ e \ q(x) = -2x^2 + x - 6$

c) $p(x) = 3x^2 - 5x + 8 \ e \ q(x) = \ -2x + 1$

Resolução:

a)

$$p(x) + q(x) = 3x^3 + 2x + 1 - 2x^3 + x - 4$$

$$p(x) + p(x) = 3x^3 - 2x^3 + 2x + x + 1 - 4$$

$$p(x) + q(x) = x^3 + 3x - 3$$

b)

$$p(x) - q(x) = 2x^2 + 4x + 2x^2 - x + 6$$

$$p(x) - q(x) = 2x^2 + 2x^2 + 4 - x + 6$$

$$p(x) - q(x) = 4x^2 + 3x + 6$$

c)

$$p(p.q)x = (3x^2 - 5x + 8).(-2x + 1)$$

$$(p.q)x = -6x^3 + 3x^2 + 10x^2 - 5x - 16x + 8$$

$$(p.q)x = -6x^3 + 3x^2 - 21x + 8$$

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

GIOVANI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa. 1ª série Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2005

IEZZI, GELSON. Matemática e realidade: 8º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado – 6ª ed. – São Paulo : Atual, 2009.

ANEXO 1 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 5x^7 + 3x + x^2$, é correto afirmar que $p(x)$ é um polinômio do:

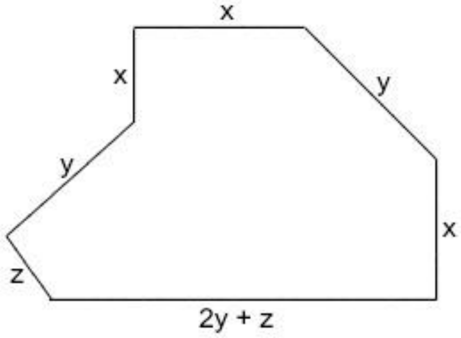
a) Primeiro grau
b) Segundo grau
c) Terceiro grau
d) Sétimo grau

Resolução:

Temos que o seu grau vale 7, pois ele é o maior expoente cujo coeficiente (que é igual a 5) é diferente de zero. Logo, resposta correta é a letra d).

2) (EAM – Aprendiz de marinheiro - Adaptada) Analise a figura a seguir:

Figura 27 - Figura Geométrica



Suponha que o terreno comprado por um proprietário tenha a forma da figura acima e suas medidas sejam representadas, em unidades de comprimento, pelas variáveis x, y e z. A expressão algébrica que representa o perímetro desse terreno é:

a) $2x + 3y + z$
b) $3x + 4y + 2z$

c) $3x + 3y + z$
d) $3x + 2y + 3z$
e) $4x + 3y + 2$

Resolução:

A soma de todos os lados é

$$x + y + x + 2y + z + z + y + x =$$
$$3x + 4y + 2z.$$

Logo, resposta correta letra b).

3) Calcular o valor numérico do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ para $x = 2$

Resolução:

Para resolver o polinômio basta substituir $x = 2$ em $p(x)$. Temos,

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 4$$
$$2^3 - 7.2^2 + 3.2 - 4$$
$$8 - 28 + 6 - 4$$
$$-18$$

3.4.2 Relatório

No dia 27 (vinte e sete) de março de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o quarto encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet (*https://meet.jit.si/promat_sala1). A lista de chamada é composta por 39 alunos, mas haviam conectados na aula 18 alunos. Nosso grupo é formado por três alunos do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

A quarta aula do projeto, encerrava o conteúdo de funções. No início da aula foi resolvido alguns exercícios sobre Função injetora, sobrejetora e bijetora, em seguida explicamos sobre Função inversa que não havia sido comentada na aula anterior. Dando sequência a aula, iniciamos o conteúdo sobre polinômios, trazendo as definições, aplicações e exercícios.

Nesta aula, utilizamos o software Geogebra para explicação da representação gráfica da Função inversa, além do programa Miro para a explicação e resolução dos exercícios propostos sobre polinômios, utilizamos também os slides para as explicações e definição do conteúdo.

Ao longo da aula, tivemos a participação de alguns alunos, principalmente com algumas dúvidas em relação aos gráficos.

A quarta aula ocorreu de maneira desejada e esperada, porém como o horário é curto para toda a explicação do conteúdo polinômios, promovemos uma atividade assíncrona para a consolidação do conteúdo referente a divisão de polinômios, visto que não teríamos aula no sábado seguinte devido ao feriado de Páscoa, assim, enviamos arquivos do PROFMAT para leitura e uma lista de exercícios para realizarem.

Assim, como todo final de aula, disponibilizamos via Whatsapp o material utilizado durante a aula, e a resolução da lista da aula anterior foi disponibilizada aos alunos um dia antes da próxima aula, na sexta-feira, para que os alunos pudessem corrigir as questões feitas e sanarem suas dúvidas na aula posterior.

4. MÓDULO 2: PROGRESSÕES ARITMÉTICA e GEOMÉTRICA

Neste módulo, apresentamos os planos de aulas com seus respectivos relatórios, qual teve por conceito central a ideia de Funções.

4.1.1 Plano de Aula

PLANO DE AULA

5º ENCONTRO – 10/05/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Públicade Ensino - NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

- Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Proporcionar aos alunos o estudo das sequências numéricas Matemáticas por meio de Progressão Aritmética (P.A.).

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Progressão Aritimética, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma sequência de números que obedecem a uma determinada lógica;
- Reconhecer a razão e os elementos que constituem uma Progressão Aritmética;

- Calcular as propriedades de uma Progressão Aritmética por meio das fórmulas adequadas;
- Realizar cálculos envolvendo Progressão Aritmética;

- Conteúdo:

Progressão Aritmética, Introdução; Fórmula do Termo Geral; Interpolação; Fórmula da Soma dos n termos de uma P.A.; Aplicações e Resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet e site Miro.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO
(2h30)

O termo Progressão Aritmética remete a um desenvolvimento gradual de um processo ou uma sucessão. Em Matemática, dizemos que esta sucessão é uma sequência.

- Sequência: É um conjunto no qual seus elementos estão dispostos em determinada ordem. No caso de uma sequência numérica, seus elementos são números.

- **Exemplo 1)**

1- {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}, sequência de números naturais;
2- {0, 2, 4, 6, 8, 10, …}, sequência de números naturais pares;
3- {2, 3, 5, 7, 11, 13, …},sequência de números primos.

- **Sequências finitas:** são aquelas em que conhecemos o primeiro até o último termo da seqüência.

- Exemplo 2)

O conjunto dos meses do ano, dos dias da semana ou o conjunto dos times de futebol do Campeonato Brasileiro.

- Sequências infinitas: são sequências em que não temos definido seu último termo.

- Exemplo 3)

O conjunto dos números múltiplos de 2.

Após breve explicação e exemplicação sobre sequência, compartilharemos alguns exercicíos para resolvermos conjuntamente, para que os alunos identifiquem os padrões e encontre a lógica.

- Exercício 1)

Seguindo o padrão da sequência numérica, qual o próximo número correspondente nas sequências abaixo:

a) {1, 3, 5, 7, 9, 11,...}
b) {0, 2, 4, 6, 8, 10,...}
c) {3, 6, 9, 12,...}
d) {1, 4, 9, 16,...}
e) {37, 31, 29, 23, 19, 17,...}

Resolução:

a) Trata-se de uma sequência de número ímpares, em que o próximo elemento é o 13.

b) Sequência de números pares, cujo elemento sucessor é o 12.

c) Sequência de razão 3, em que o próximo elemento é 15.

d) O próximo elemento da sequência é o 25, donde: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$.

e) Trata-se de uma sequência de números primos, sendo o próximo elemento 13.

- Progressão Aritmética: Progressão Aritmética (P.A.) é qualquer sequência numérica na qual cada termo a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior certo número constante denominado razão (r). Dependendo do valor de r a progressão aritmética pode ser crescente, constante ou decrescente.

- P.A crescente: uma P.A. é crescente, se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente.
- P.A constante: uma P.A. é constante se, e somente se, todos os seus termos são iguais entre si.
- P.A decrescente: uma P.A. é decrescente se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo precedente.

- Exemplo 4)

Dada à sequência {0, 2, 4, 6, 8...}, qual a sua razão?

Resolução:

$$r = 2$$

Dada à sequência {3, 3, 3, 3,...}, qual a sua razão?

Resolução:

$$r = 0$$

Dada à sequência {12,8,4,0,...}, qual a sua razão?

Resolução:

$$r = 4$$

- Termo Geral de uma Progressão Aritmética: Para determinar os termos da sequência, aplica-se a seguinte fórmula, considere uma P.A. finita qualquer $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ e razão igual a r, teremos:

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 - a_1 - r = r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 - a_1 - 2r = r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r$$

Portanto, o termo geral de uma P.A é calculado utilizando a fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r$$

Em que,

r é a razão

a_1 é o primeiro termo da P.A.

n é o número de termos da P.A.

a_n é o último termo da P.A.

- Exercício 2)

(UFRGS**)** Em uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 23 e a razão é – 6, qual a posição ocupada pelo elemento -13?

Resolução:

A fórmula do termo geral de uma P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Substituindo os valores dados no exercício na fórmula acima, teremos:

$$-13 = 23 + (n - 1)(-6)$$

$$-13 = 23 - 6n + 6$$

$$6n = 23 + 6 + 13$$

$$6n = 36 + 6$$

$$6n = 42$$

$$n = \frac{42}{6}$$

$$n = 7$$

Logo, o número -13 ocupa a 7° posição.

- Meios Aritméticos: Numa P.A. Finita $\{a_1,\ a_2,\ a_3$,..., $a_{n-1},\ a_n\}$ os termos $a_2,\ a_3$,...,a_{n-1}, são chamados de “meios aritméticos da P.A.”.

- Exemplo 5)

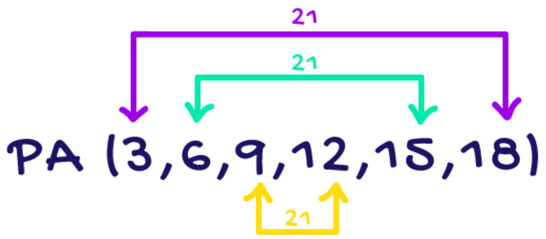
Na P.A. {2,5,8,11,14,17} temos que 5,8,11,14 são meios aritméticos da progressão aritmética. Os extremos são 2 e 17.

- **Interpolação Aritmética:** Interpolar significa “colocar entre”. Interpolar meios aritméticos entre dois números dados, é acrescentar números entre estes que são conhecidos, de forma que a sequência numérica formada seja uma P.A. Para realizar a interpolação aritmética é necessário o uso da fórmula do termo geral.

Ao analisar as sequências numéricas que formam progressões aritméticas, é possível encontrar algumas relações chamadas de propriedades.

- 1° Propriedade Progressão Aritmética: numa P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Dois termos equidistantes dos extremos são dois termos que possuem a mesma distância do primeiro e do último termo da sequência. Ao observar a figura,

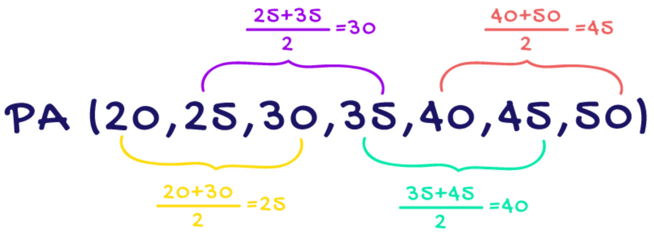
Figura 28 - Primeira Propriedade PA



Percebe-se que os extremos da P.A. apresentada são os números 3 e 18. Tanto o número 6 quanto o número 15 estão a apenas uma razão de distância destes extremos. Da mesma forma, tanto 9 quanto 12 se encontram a duas razões de distância dos extremos. Assim, os termos 6 e 15 e 9 e 12 são termos equidistantes dos extremos. Por isso, a soma entre 3 e 18, 6 e 15 e 9 e 12 resulta no mesmo valor, 21.

- 2° Propriedade Progressão Aritmética: em uma P.A., tomando-se três termos consecutivos, o termo central é a média dos seus vizinhos.

Figura 29 - Segunda Propriedade PA



Em todos os casos, o valor do termo central foi exatamente igual a média aritmética entre os valores dos seus vizinhos.

Em uma P.A. finita cujo número de termos é ímpar, a média aritmética entre os extremos e entre os termos equidistantes dos extremos, sempre será igual ao valor do termo central da sequência.

Observa-se que o 35 não só é igual a média aritmética entre seus vizinhos, como também é igual a média aritmética entre os termos equidistantes dos extremos 25 e 45, e entre os próprios termos extremos, 20 e 50.

- Exercício 7)

Interpolar 6 meios aritméticos entre 7 e 42 de modo que $a_1 = 7$ e $a_8 = 42$.

Resolução:

Primeiro precisamos estabelecer a razão da progressão, então utilizamos a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_8 = 7 + (8-1)r$$

$$42 = 7 + 7r$$

$$35 = 7r$$

$$r = \frac{35}{7}$$

$$r = 5$$

Utilizando a fórmula do termo geral, descobrimos a nossa razão, que no caso é 5. Como sabemos que o nosso primeiro termo é 7, temos então nossa progressão aritmética igual à {7, 12, 22, 27, 32, 37, 42}.

- Soma de uma Progressão Aritmética: Conta-se que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss, aproximadamente aos 10 anos de idade, foi castigado com a sua turma na escola. O professor mandou os alunos somarem todos os números que aparecem na sequência de 1 até 100.

Gauss não foi só o primeiro a terminar em um curtíssimo período, como também foi o único a acertar o resultado (5050). Além disso, não apresentou cálculo algum. O que ele fez foi reparar na primeira propriedade que vimos anteriormente, a qual a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos. Não havia conhecimento sobre PA na época, mas Gauss visualizou a lista de números e percebeu que, somando o primeiro com o último, teria 101 como resultado; somando o segundo com o penúltimo, o resultado também seria 101 e assim por diante. Como a soma de todos os pares de termos equidistantes dos extremos resultava em 101, Gauss só precisou multiplicar esse número por metade dos termos disponíveis para encontrar o resultado 5050. Com o conhecimento de Gauss, originou-se a expressão para calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.A., ou seja, dada uma P.A qualquer finita, somaremos os n primeiros termos dela, então teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Em que,

a_1 é o primeiro termo da P.A.

a_n é último termo a ser somado na P.A.

n é o número de termos a serem somados na P.A.

- Exercício 8)

Com o intuito de construir um jogo novo, foram colocados sobre um tabuleiro de xadrez grãos de arroz da seguinte maneira: na primeira casa, foram colocados 5 grãos; na segunda, 10; na terceira, 15; e assim por diante. Quantos grãos de arroz foram usados nesse tabuleiro?

Resolução:

Seguindo esse padrão, teremos uma P.A. de razão 5, com primeiro termo também igual a 5. O número de termos dessa P.A. é 64, pois é exatamente o número de casas do tabuleiro, então falta apenas o número de grãos da última casa para calcular a soma. Esse número pode ser obtido da seguinte maneira:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{64} = 5 + (64 - 1)5$$

$$a_{64} = 5 + (63)5$$

$$a_{64} = 5 + 315$$

$$a_{64} = 320$$

Agora basta substituir esses valores na fórmula da soma dos termos de uma P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(5 + 320)64}{2}$$

$$S_n = \frac{(325)64}{2}$$

$$S_n = \frac{20800}{2}$$

$$S_n = 10400$$

Logo, foram usados 10400 grãos de arroz no tabuleiro.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. 3. Ed. São Paulo. Editora Ática, 2011

Termo Geral de Progressão Aritimétrica. Disponível em <https://blog.professorferretto.com.br/termo-geral-de-uma-progressao-aritmetica> Acesso em 14 de março de 2021.

GIOVANI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa. 1ª série Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2005

ANEXO 5 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) (ENEM - Adaptada) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual.

O quadro abaixo apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção:

Figura 30 - Projeção de Produção

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25
b) 500,85
c) 502,87
d) 558,75
e) 563,25

Resolução:

Podemos afirmar que a quantidade total em toneladas produzida no período de 2012 à 2021 é de 558,75 toneladas de arroz pois sabemos que o seu último termo é 61,50 toneladas e para saber a quantidade total será necessário empregar a fórmula da soma dos termos de uma P.A que é representada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Sendo, n=10 termos, então, a nossa expressão será a seguinte:

$$S_{10=} \frac{(a_1 + a_{10})10}{2}$$

$$S_{10=} (50{,}25 + 61{,}50)5$$

$$S_{10=} (111{,}75)5$$

$$S_{10=} 558{,}75$$

Logo, a quantidade total de arroz que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de 558,75 toneladas, ou seja, a alternativa correta é a letra d).

2) (UERR-2019) Qual é o primeiro termo de uma progressão aritimética, em que $a_{20} = 84$, e a razão $r = 4$.

a) 8

b) 6

c) 4

d) 2

e) 20

Resolução:

Usando a formula de uma P.A temos que,

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Logo,

$$a_{20} = a_1 + (n - 1)r$$

$$84 = a_1 + (20 - 1)4$$

$$84 = a_1 + 19.4$$

$$84 = a_1 + 76$$

$$a_1 = 84 - 76$$

$$a_1 = 8$$

Resposta correta, então, letra a).

4.1.2 Relatório 5

No dia 10 (dez) de abril de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o quinto encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet*. A lista de chamada é composta por 39 alunos, mas no início da aula havia 19 alunos presentes (conectados).

Nosso grupo é formado por três alunos do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

A quinta aula do projeto, tinha como tema principal a Progressão Aritmética, em que se buscava que o aluno fosse capaz de identificar uma sequência, reconhecer a razão e os elementos que constituem uma progressão, assim como as propriedades e a forma de calcular.

Utilizamos o site Miro e o Microsoft Word, além dos slides para realizar a explicação e as resoluções dos exercícios propostos.

Na quinta aula, em sua totalidade utilizamos a resolução de problemas como metodologia, além da aplicação de fórmulas utilizadas para resolverem problemas sobre progressão aritmética, e buscamos envolver problemas e questionamentos do cotidiano.

A aula prevista, ocorreu de maneira desejada e esperada, tivemos alguns problemas tecnológicos, mas nada interferiu no andamento da aula.

Assim, como todo final de aula, disponibilizamos via Whatzapp o material utilizado durante a aula e a resolução da lista da aula anterior.

4.2.1 Plano de Aula

PLANO DE AULA

6º ENCONTRO – 17/04/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Públicade Ensino - NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

- Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Dar aos alunos capacidade para que eles reconheçam as Progressões Geométricas e utilizem suas fórmulas para resolução de problemas.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Progressão Geométrica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Ter conhecimento da definição de Progressão Geométrica e suas características.
- Reconhecer a classificação das Progressões Geométricas.
- Diferenciar Progressão Arítimética e Progressão Geométrica.
- Realizar cálculos envolvendo Progressão Geométrica.

- Conteúdo:

Progressão Geométrica; Aplicações e resoluções de exercícios;

Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de vídeochamada, utilizando o Google Meet e o site Miro.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO (2h30)

Iniciaremos a aula com a definição de Progressão Geométrica, o qual é foco da nossa aula de número 6.

- Progressão Geométrica: é uma sequência numérica que em cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada razão.

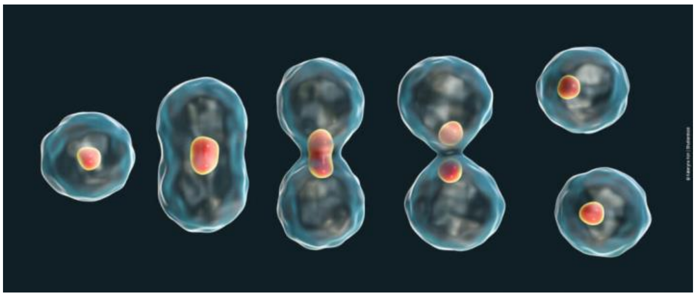
Assim, para descobrirmos a razão q de uma Progressão Geométrica de termos não nulos, temos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

- Exemplo 1)

No processo de divisão celular por mitose cada célula se divide originando outras duas, conforme a Figura 31.

Figura 31 - Mitose



Se o processo continua qual a sequência que representa o número de células originadas em cada etapa da divisão? Qual a razão que existe em cada etapa?

Resolução:

Como a mitose vai se dividindo em dois, a sequência {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512...} a razão é 2.

- Exemplo 2)

{- 2, - 4, - 8, -16,...} é uma PG, sua razão é: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{-2} = 2.$

- Exemplo 3)

{1, - 3, 9, - 27,...} é uma PG, sua razão é: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{1} = -3$

- Termo Geral da Progressão Geométrica: O termo geral de uma Progressão Geométrica é uma fórmula usada para descobrir um termo qualquer da sequência. Para isso, é necessário conhecer o primeiro termo, a razão da progressão e a posição do termo a ser encontrado nela.

Considerando-se uma Progressão Geométrica qualquer, cujo primeiro elemento é a_1 e a razão é q, o termo geral a_n dessa progressão é dado pela fórmula:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Em que:

n é o índice do termo que queremos determinar, ou seja, está ligado à posição do termo na progressão.

a_1 é o primeiro termo da progressão geométrica

q é sua razão.

- Classificação das Progressões Geométricas: Dependendo dos termos que compor uma Progressão Geométrica ela será classificada em:

- Progressão Geométrica crescente: é aquela que os valores dos termos vão crescendo.

  $a_1 > 0 \ e \ q > 1$, por exemplo, {1,2,4,8,16,32,64, ...}

  $a_1 < 0 \ e \ 0 < q < 1$, por exemplo $\{-1 , \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \dots .\}$

- Progressão Geométrica decrescente: é aquela que os valores dos termos vão diminuindo.

  $a_1 > 0 \ e \ 0 < q < 1$, por exemplo, {64, 32, 16,8, ...}

  $a_1 < 0 \ e \ q > 1$, por exemplo, {-2,-4,-8, ...}

- Progressão Geométrica constante: é aquela que os valores do termos são iguais, ou seja, a razão é igual a $q = 1$.

  Por exemplo, {5,5,5,5, …, 5}

- Progressão Geométrica oscilante: é aquela que os valores dos seus termos intercalam em negativos e positivos, ou seja, que $a_1 \neq 0 \; e \; q < 0$.

- Progressão Geométrica quase nula: é aquela que apenas o primeiro termo é diferente de zero.

  Por exemplo, {2,0,0,0,0,0, …}

- Exemplo 4)

Em um surto epidêmico ocorrido em certa cidade com cerca de 10.000 habitantes, cada indivíduo infectado contaminava 10 outros indivíduos no período de uma semana. Supondo-se que a epidemia tenha prosseguido nesse ritmo, a partir da contaminação do primeiro indivíduo, pode-se estimar que toda a população dessa cidade ficou contaminada em, aproximadamente quantos dias?

Resolução:

Como cada indivíduo infectado contaminava 10 outros indivíduos, a quantidade de indivíduos infectados cresce 10 vezes a cada semana.

Quando temos uma sucessão de números reais obtida multiplicando o número anterior por um valor fixo, temos uma progressão geométrica.

A fórmula do termo geral da PG é:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Temos que;

$$a_n = 10.000$$

$$a_1 = 10$$

$$q = 10$$

$$n = ?$$

Logo teremos:

$$10.000 = 10.10^{n-1}$$

$$10^{n-1} = \frac{10.000}{10}$$

$$10^{n-1} = 1000$$

$$10^{n-1} = 10^3$$

Usando a propriedade das potências, em que temos a mesma base, logo igualamos os expoentes, obtendo-se:

$$10^{n-1} = 10^3$$
$$n - 1 = 3$$
$$n = 3 + 1$$
$$n = 4$$

Então temos que a população toda estará infectada em 4 semanas que equivalem a 28 dias.

- Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita: A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ de razão $q \neq 1$ é igual a

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Exemplo 5)

Há uma lenda que diz que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa por ter inventado esse jogo. O inventor respondeu : “1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda cada, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa”. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas (8 linhas por 8 colunas), o inventor pediu a soma dos 64 primeiros termos da seguinte Progressão Geométrica {1, 2, 4, 8, ...} de razão 2.

Ao realizarmos a aplicação da fórmula,

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$1.\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Ou seja, a recompensa era impagável, pois a quantia de trigo superava as suas colheitas nos próximos 2000 anos.

- Geometria Fractal: A Geometria Fractal permite a integração de vários campos da Matemática e de outras ciências. A ideia de estudá-la deve-se ao fato de ser mais precisa do que a geometria euclidiana para representar formas da natureza tais como nuvens, montanhas, mapas, flores, árvores entre outras. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o lado experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais.

Esse assunto tem o objetivo principal de fixar e motivar o estudo de progressões aritméticas e geométricas através do estudo de fractais.

As construções dos fractais serão feitas no Geogebra, que é um software livre de geometria dinâmica. Será feita uma descrição minuciosa sobre os passos a serem seguidos para a construção de cada fractal.

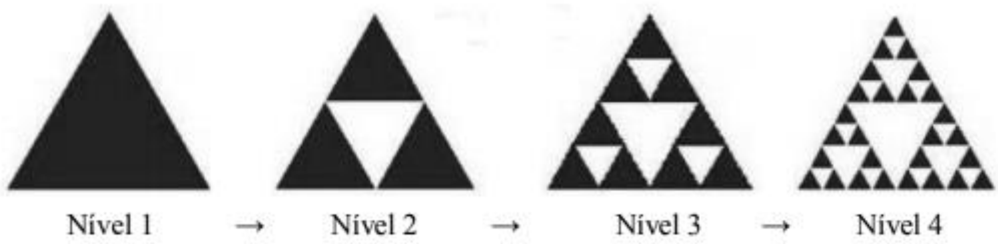
-Triângulo de Sierpinski e aplicações em Progressão Geométrica: Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, apresentou em 1916 a curva de Sierpinski ou Triângulo de Sierpinski. Existem diferentes processos para a construção do triângulo de Sierpinski, o mais comum, e o que nos interessa, é a construção por remoção de triângulos, utilizando um triângulo equilátero. O motivo de sua utilização dá-se pela conveniência e por questões estéticas. Este fato não impede que o mesmo seja construído utilizando qualquer outro tipo de triângulo.

Conforme vamos construindo esse fractal vão surgindo várias sequências relacionadas a número de triângulos, comprimentos e áreas, que formam progressões geométricas. Propomos duas atividades, uma baseada no comprimento da curva e outra relativa a área do fractal, com o objetivo de fixar o conceito de progressão geométrica. Começamos com uma descrição da construção do triângulo de Sierpinski, em seguida apresentaremos as atividades e por fim a roteiro passo a passo de como montar o macro do fractal no Geogebra.

Construção:

1. Considerar inicialmente um triângulo eqüilátero;
2. Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos eqüiláteros;
3. Remover o triângulo central;
4. Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;
5. Repetir o passo 4 sucessivamente;

Figura 32 - Fractal



- Problema: Considerando inicialmente um triângulo equilátero de lado medindo 1 cm, complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do “Triângulo de Sierpinski”.

Figura 33 - Sucessão de Passos do Triângulo de Sierpinski

	Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	*0*				
	*1*				
	*2*				
	*3*				
...	...	...	...	...	...
	n				

a) A sequência dada pelos dos valores da coluna “número de triângulos” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

b) A sequência dada pelos dos valores da coluna “comprimento do lado de cada triângulo” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

c) A sequência dada pelos dos valores da coluna “perímetro de cada triângulo” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

Resolução:

	Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	*0*	*1*	*1*	*3*	*1.3*
	*1*	*3*	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$3.\frac{3}{2}$
	*2*	3^2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3}{2^2}$	$3^2.\frac{3}{2^2}$
	*3*	3^3	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$3^3.\frac{3}{2^3}$

a) Observando a sequência, $\{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots.\}$, constatamos se tratar de uma progressão geométrica de primeiro termo sendo 1 e razão 3.

b) Observando a sequência $\left\{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots)\right\}$ constatamos se tratar de uma progressão geométrica de primeiro termo sendo 1 e a razão $\frac{1}{2}$.

c) Observando a sequência $\left\{(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \ldots, \frac{3}{2^n}, \ldots)\right\}$ constatamos se tratar de uma progressão geométrica de primeiro termo sendo 3 e e razão $\frac{1}{2}$.

REFERÊNCIAS

PROGRESSÃO ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E FRACTAIS - MÁRCIO MACÁRIO DA CUNHA. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=81634811100&d=20151201163301&h=151a0e62393a88c0ffd1e42d844dae438235e8b3>. Acesso em 16 de março de 2021.

ANEXO 6 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Um cachorro persegue um coelho. A velocidade do coelho é 1/10 da velocidade do cachorro. A distância que os separa é de 100 metros. Nessas condições, quando o cachorro vencer os 100 metros, o coelho terá corrido 1/10 do que percorreu o cachorro e ficará 10 metros a sua frente. Quando o cachorro correr esses 10 metros, o coelho terá percorrido 1/10 dessa distância e estará 1 metro a sua frente. Quando o cachorro correr esse metro, o coelho terá corrido 10 centímetros, e assim por diante. Esse raciocínio pode levar muita gente a pensar que o cachorro nunca alcançará o coelho. Assim também pensou o coelho. Azar dele.

Figura 34 - Ilustração de Pensamento

Com os recursos estudados é possível determinar em que ponto o cachorro alcançará o coelho. E, então, quantos metros ele deverá correr para alcançar o coelho?

Resolução:

Temos de acordo com o enunciado que $a_1 = 100$, que é a distancia entre o coelho e o cavalo. E temos que a razão entre as distancias é $\frac{1}{10}$, então temos que $q = \frac{1}{10}$.

Precisamos calcular a soma das distâncias percorridas pelo coelho. Assim, após essa distância, o cachorro o alcançará.

O coelho começa a correr a partir de 100 m e assim suas distâncias subseqüentes. Logo, precisamos calcular a soma:

$$\mathrm{S} = \frac{100}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\mathrm{S} = \frac{100}{9}$$

$$\mathrm{S} = 111{,}11$$

Assim, teremos 111,11 metros.

2) Sabendo-se que a sucessão $\{x - 1, x + 2, 3x, \ldots\}$ é uma P.G. crescente, determine x.

Resolução:

Aplicando a propriedade para encontrar a razão, temos,

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{3x}{x+2}$$

Multiplicando os termos, $(x + 2)^2 = (x - 1).(3x)$.

Resolvendo o quadrado no 1º membro e o produto no 2º, temos a equação:

$x^2 + 4x + 4 = 3x^2 - 3x$.

Simplificando, vem: $2x^2 - 7x - 4 = 0$.

Resolvendo a equação, temos $x = 4$ ou $x = -0{,}5$.

i) Para $x = -0{,}5$ temos a PG $\{-1{,}5\,;\ 1.5\,;\ -1{,}5\}$, que não é crescente.

ii) Para $x = 4$ temos a PG $\{3;\ 6;\ 12\}$, que é crescente.

Logo a resposta é $x = 4$.

3) Em uma colônia de bactérias, uma bactéria divide-se em duas a cada hora. Determinar o número de bactérias originadas de uma só bactéria dessa colônia depois de 15 horas.

Resolução:

Usando a fórmula da progressão geométrica temos:

$$a_n = a_1 . q^n$$

$$a_n = 1 . 2^{15}$$

$$a_n = 2^{15}$$

$$a_{16} = 32768$$

Por que consideramos n como 16 e não 15? Pois se fossemos contar com a primeira bactéria, seriam 16 termos, embora fossem 15 horas, por isso na fórmula sempre diminuímos o total de termos por 1 (q^{n-1}).

4.2.2 Relatório 6

No dia 17 (dezessete) de abril de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o sexto encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet*. https://meet.jit.si/promat_sala1A. nossa lista de chamada é composta por 39 alunos, porém, no início da aula havia 17 alunos conectados. Nosso grupo é formado por três alunos do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

Analisamos que a quantidade de alunos permanecia semelhantes entre uma aula e outra, o qual era esperado por estarmos na metade do nosso projeto

A sexta aula do projeto, tem como tema principal Progressão Geométrica, em que se objetivava que o aluno seja capaz de diferenciar a progressão geométrica da progressão aritmética, conhecer as definições, fórmulas e a classificação perante as progressões.

Utilizamos o site Miro e o Microsoft Word, além dos slides para explicação e resoluções dos exercícios propostos.

Iniciamos a sexta aula, revendo alguns exercícios da aula anterior para relembrar as progressões Aritméticas. Ressaltamos a utilização das progressões do nosso cotidiano, para que conteúdo fosse absorvido de melhor forma.

A sexta aula, em sua totalidade utilizamos a resolução de problemas como metodologia, além da aplicação de fórmulas normalmente utilizadas para resolverem problemas sobre progressão geométrica.

Nessa aula, tivemos a participação ativa da maior parte dos alunos, com questionamentos e dúvidas sobre o entendimento acerca do conteúdo.

A aula projetada para a aula seis, ocorreu de maneira desejada, tivemos alguns problemas tecnológicos, mas nada interferiu o andamento da aula.

Assim, como todo final de aula, disponibilizamos o material utilizado durante a aula, e a resolução da lista da aula anterior, foi disponibilizada aos alunos na sexta-feira, para que analisem as resoluções e caso tiverem alguma dúvida para sanarmos no sábado.

5. MÓDULO 3: MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Neste módulo, apresentamos os planos de aulas com seus respectivos relatórios, qual teve por conceito central a ideia de Matrizes e Sistemas Lineares.

5.1.1 Planos de Aulas 7 e 8

PLANO DE AULA 7º e 8° ENCONTRO –
24/04/2021 e 08/05/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Públicade Ensino - NRE CASCAVEL ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2020 e ENEM.

- Tempo de execução

Dois encontros com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Propiciar ao aluno o estudo de Sistema Lineares, suas classificações e suas resoluções por meio de matrizes.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Sistemas Lineares e Matrizes, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e classificar um sistema linear;
- Resolver os Sistemas lineares;
- Identificar os tipos de matrizes;
- Resolver problemas com matrizes;
- Reconhecer matrizes, bem como as operações de soma, subtração e multiplicação;

- Conteúdo:

Sistema Lineares e Matrizes; Aplicações e Resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de streaming utilizando o Google Meet e site Miro e outros.

ENCAMINHAMENTO METÓDOLOGICO (2h30)

SISTEMAS LINEARES

- Equação Linear: É toda equação que possui variável e apresenta-se na seguinte forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2\ e\ a_3, \dots, a_n$, são os coeficientes reais e o termo independente é representado pelo número real *b*.

- Exemplos:

$$x + y + z = 20$$

$$2x - 3y + 5z = 6$$

$$4x + 5y - 10z = -3$$

$$x - 4y - z = 0$$

- Sistema Linear: Um conjunto de *m* equações lineares com variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, formam um sistema linear com *m* equações e *n* incógnitas.

- Sistema linear com duas equações e duas variáveis: $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 24 \\ x - y + 10z = 30 \end{cases}$

- Sistema linear com três equações e três variáveis: $\begin{cases} x + 10y - 12z = 120 \\ 4x - 2y - 20z = 60 \\ -x + y + 5z = 10 \end{cases}$

- Classificação de um Sistema Linear: Todo sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções apresentadas por ele.

- SPD, Sistema Possível e Determinado, qual possui uma única solução.
- SPI , Sistema Possível e Indeterminado, qual possui infinitas soluções.
- SI, Sistema Impossível, em que não possui solução.

- Solução de Sistemas Lineares: Resolver um sistema é encontrar os valores de suas incógnitas. Um sistema pode ter três tipos de resultados, qual um resultado único, em que são encontrados os valores de todas as incógnitas, infinitos resultados, com um conjunto de soluções determinado de acordo com as informações do sistema, ou não ter solução alguma.

Para resolver um sistema, existem algumas técnicas; e apresentaremos duas delas. O método da adição e o método da substituição.

- Metódo da Substituição: O método da substituição consiste em seguir o passo a passo abaixo apresentado, para resolver um sistema de equações:

- 1º – Escolher uma das equações e encontrar o valor algébrico de uma de suas incógnitas;
- 2º – Após substituir o valor algébrico dessa incógnita em outra equação, simplifique o resultado e, se isso resultar em uma equação simples de uma incógnita, resolva-a. Se resultar em uma equação com duas incógnitas ou mais, encontre o valor algébrico de uma das incógnitas e substitua esse resultado em outra equação;
- 3º – Finalizado o processo acima, restará uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Resolvendo-a, encontraremos o valor numérico de uma das incógnitas do sistema. Para encontrar o valor numérico das outras, deveremos substituir o número encontrado nas outras equações;

- Exemplo 1)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 50 \quad (I) \\ x + y = 20 \qquad (II) \end{cases}$$

Chamaremos a primeira equação de (I) e a segunda de (II).

Escolhemos uma das equações, para realizar os passos descritos, neste caso escolheremos a equação (II).

$$x + y = 20$$

Isolando uma das incogitas para substituirmos na equação, temos que, isolando x;

$$x = 20 - y$$

Agora, substituindo o valor de x na nossa equação (I) temos;

$$2x + 4y = 50$$

$$2(20 - y) + 4y = 50$$

$$40 - 2y + 4y = 50$$

$$-2y + 4y = 50 - 40$$

$$2y = 10$$

$$y = \frac{10}{2}$$

$$y = 5$$

Pode-se notar que realizado o procedimento, garantimos o valor numérico da incógnita *y.* Para encontrar o valor da incógnita *x*, escolheremos a equação (II) e susbtituiremos nela $y = 5$.

Então,

$$x + y = 20$$

$$x + 5 = 20$$

$$x = 20 - 5$$

$$x = 15$$

Dessa forma, encontramos os valores das incógnitas x e y , e resolvemos o sistema.

- Método da adição: O método da adição consiste em somar os termos semelhantes de todas as equações de um sistema e simplificar o resultado, com o objetivo de eliminar incógnitas nesse processo.

No sistema formado pelas equações $2x + 3y = 20$ e $x – 3y = 10$, por exemplo, o simples fato de somar termos semelhantes de ambas as equações oferece-nos o seguinte resultado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 & (I) \\ x - y = 10 & (II) \end{cases}$$

Chamaremos a primeira equação de (I) e a segunda de (II). Somando (I) e (II), temos;

$$3x + 0y = 30$$

$$3x = 30$$

$$x = 10$$

Substituindo o valor de $x = 10$ na equação (I) temos;

$$2(10) + 3y = 20$$

$$20 + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 20$$

$$3y = 0$$

$$y = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos o valor numérico da primeira incógnita e, após substituí-lo em uma das equações, obtemos o valor numérico da segunda incógnita. Perceba que somente foi possível eliminar a incógnita y porque o termo $3y$ é positivo na primeira equação e negativo na segunda.

Quando isso não acontece a uma das incógnitas, é possível transformar a equação em outra equivalente, que possui o inverso aditivo buscado. Para tanto, basta multiplicar ambos os membros da equação por um fator qualquer, escolhido entre os números reais, de modo que uma das incógnitas nessa equação torne-se inverso aditivo.

- Exemplo 2)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 50 & (I) \\ x + y = 20 & (II) \end{cases}$$

Chamaremos a primeira equação de (I) e a segunda de (II). Multplicando a equação (II) por -2, temos;

$$\begin{cases} 2x + 4y = 50 \\ x + y = 20 \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 50 \\ -2x - 2y = -40 \end{cases}$$

Agora,somando a equação (I) e (II) temos;

$$2y = 10$$

$$y = \frac{10}{2}$$

$$y = 5$$

Substituindo o valor de $y = 5$ na equação (I) temos;

$$2x + 4(5) = 50$$

$$2x + 20 = 50$$

$$2x = 50 - 20$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

Assim, obtermos a solução do sistema pelo metódo da adição.

- Exercícios 1)

(IFAL – 2018 - Adaptada) Resolva o sistema de equações abaixo para x e y reais e determine o valor da soma $x + y$.

$$\begin{cases} x - y = 14 & (I) \\ 3x + 2y = 22 & (II) \end{cases}$$

Resolução:

Iremos utilizar o método da multiplicação e adição

Chamaremos a primeira equação de linha (I) e a segunda de linha (II).

Fazendo $(I) \,.3$ temos;

$$\begin{cases} 3x - 3y = 42 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

Agora, fazendo (I) – (II) temos;

$$-5y = 20$$

$$y = -4$$

Agora substituindo o valor de $y = -4$ na (I), temos;

$$3x - 3(-4) = 42$$

$$3x + 12 = 42$$

$$3x = 42 - 12$$

$$3x = 30$$

$$x = \frac{30}{3}$$

$$x = 10$$

Então temos que $x = 10 \; e \; y = -4$. Logo, $x + y = 10 - 4 = 6$

- Exercício 2)

(FUVEST) – Carlos e sua irmã Andréa foram com seu cachorro Bidu à farmácia do seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas: Carlos e o cachorro pesam juntos 87 kg; Carlos e Andréa pesam 123 kg e Andréa e Bidu pesam 66 kg.

Podemos afirmar que:

a) Cada um deles pesa menos que 60 kg.

b) Dois deles pesam mais que 60 kg.

c) Andréa é a mais pesada dos três.

d) O peso de Andréa é a média aritmética dos pesos de Carlos e de Bidu.

e) Carlos é mais pesado que Andréa e Bidu juntos.

Resolução:

Sejam x, y e $z,$ os pesos de Carlos, Andréa e do cachorro Bidu, respectivamente.

Então, teremos:

$$x + z = 87 \quad \text{(I)}$$

$$x + y = 123 \quad \text{(II)}$$

$$y + z = 66 \quad \text{(III)}$$

Fazendo (I) – (II), membro a membro,teremos:

$$(x + z) – (x + y) = 87 - 123$$

$$z – y = -36 \text{ (IV)}$$

Fazendo (IV) + (III), membro a membro, teremos:

$$(z - y) + (y + z) = -36 + 66$$

$$2z = 30$$

$$z = 15$$

Substituindo $z = 15$ em (I) temos;

$$x + 15 = 87$$

$$x = 87 - 15$$

$$x = 72$$

Substituindo $x = 72$ em (II) temos;

$$72 + y = 123$$

$$y = 123 - 72$$

$$y = 51$$

Portanto os pesos de Carlos, Andréia e Bidú são respectivamente, 72kg, 51kg e 15kg.

Analisando as alternativas temos que;

a) Cada um deles pesa menos que 60 kg. Falsa, pois Carlos pesa 72kg.

b) Dois deles pesam mais que 60 kg. Falsa pois, somente Carlos pesa mais que 60kg.

c) Andréa é a mais pesada dos três. Falsa, pois Carlos é o mais pesadodos 3.

d) O peso de Andréa é a média aritmética dos pesos de Carlos e de Bidu.

Falsa pois, para o peso de Andréa ser a media aritimetica dos pesos de Carlos e

Bidu,

$$51 = \frac{72 + 15}{2}$$

$$51 = \frac{87}{2}$$

$$51 = 43{,}5$$

51 não é igual a 43,5

e) Carlos é mais pesado que Andréa e Bidu juntos. Verdadeiro, pois Carlos pesa 72kg e Andréia e Bidu pesam 51kg e 15kg respectivamente, $51 + 15 = 66$, e 72kg > 66kg.

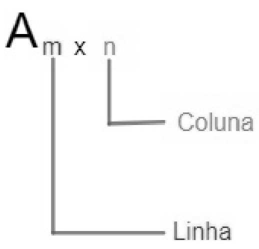
- Representação de um sistema linear com Matrizes: Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos. Com base a isto, desevolveremos a representação dos sistemas lineares em matrizes, assim como as definições e representações das matrizes em específico.

- Matrizes: A matriz é comumente utilizada para a organização de dados tabulares a fim de facilitar a resolução de problemas. As informações das matrizes, sejam estas numéricas ou não, são dispostas organizadamente em linhas e colunas.

O conjunto das matrizes munido das operações de adição, subtração e multiplicação e de características, como elemento neutro e inverso, forma uma estrutura Matemática que possibilita sua aplicação em diversos campos dessa grande área do conhecimento.

As matrizes são sempre representadas por letras maiúsculas A, B, C ..., que são acompanhadas por índices, nos quais o primeiro número indica a quantidade de linhas, e o segundo, o número de colunas.

Figura 35 – Denotação de uma Matriz



A quantidade de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) de uma matriz determina sua ordem. A matriz A possui ordem m por n. Os elementos contidos em uma matriz ficam organizadas entre parênteses, colchetes ou duas barras verticais.

Uma matriz de m linha e n colunas é representada por:

Figura 36 - Matriz de m linhas e n colunas

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Ordens e Tipos de Matrizes: Uma matriz é dada pela sua ordem dependendo da quantidade de elementos em suas linhas e colunas ou por características específicas.

- Exemplo 3)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 3 x 1. Uma matriz contendo 3 linhas e 1 coluna.

$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 3 x 2. Uma matriz contendo 3 linhas e 2 colunas.

$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & -5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 4 x 2. Uma matriz contendo 4 linhas e 2 colunas.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 1 x 4. Uma matriz contendo 1 linha e 4 colunas.

As matrizes com número de linhas e colunas iguais são denominadas matrizes quadradas.

- Exemplo 4)

$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 2 x 2. Uma matriz contendo 2 linhas e 2 colunas.

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 3 x 3. Uma matriz contendo 3 linhas e 3 colunas.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 4 x 4. Uma matriz contendo 4 linhas e 4 colunas.

- Exercício 3)

Observe a matriz seguinte e responda:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

a) De que tipo ou ordem é a matriz dada?

b) Quais são os elementos da 1ª linha?

c) E os da 3ª coluna?

d) Qual é o elemento que está na 2ª linha e na 2ª coluna?

e) E na 1ª linha e na 4ª coluna?

f) E na 4ª linha e na 2ª coluna?

g) Qual o resultado da soma dos números da 2ª coluna?

Resolução:

a) A matriz é 4 x 4, ou seja, matriz de quarta ordem.

b) [1,2,7,6]

c) [7,2,0,5]

d) 6

e) 3

f) 6

g) 16

- Denominações Especiais das Matrizes: Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha:** matriz do tipo $1\ x\ n$, ou seja, com uma única linha.
- **Matriz coluna:** matriz do tipo $m\ x\ 1$, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo, a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ do tipo 3 x 1.
- **Matriz quadrada:** matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem n. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.
- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos, em que é representada por 0_{mxn}.

Por exemplo, $O_{2x3}= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

  Por exemplo,

Figura 37 - Matriz Diagonal

$$B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por I_n**,** sendo n a ordem da matriz.

  Por exemplo:

Figura 38 - Matriz Identidade

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz transposta**: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas.

  Por exemplo:

  Se $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

  Então $A^t{}_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Desse modo, se a matriz A_{2x3} é do tipo $m\ x\ n$, $A^t{}_{3x2}$ é do tipo $n\ x\ m$. Note que a 1ª linha de A_{2x3} corresponde à 1ª coluna de $A^t{}_{3x2}$ e a 2ª linha de A_{2x3} corresponde à 2ª coluna de $A^t{}_{3x2}$.

- **Matriz simétrica**: matriz quadrada de ordem n tal que A = A^t.

  Por exemplo,

$$A_{3x3}= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Fazendo a $A^t{}_{3x3}= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5, a_{13} = a_{31} = 6, a_{23} = a_{32} = 4$,

- **Matriz oposta**: matriz $-A$ obtida a partir de A trocando-se o sinal de todos os elementos de A.

  Por exemplo,

Figura 39 - Matriz Oposta

$$Se\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Igualdade de matrizes: duas matrizes, A e B, do mesmo tipo $m\,x\,n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

Figura 40 - Matrizes Iguais

$$Se\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e A = B, então c = 0 e b = 3}$$

.

- Adição e subtração de matrizes: A adição e subtração de matrizes consiste em realizar uma operação de adição ou subtração entre duas matrizes de mesma ordem. Por exemplo, matriz de ordem 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, etc. Para que isso seja possível, as matrizes a serem realizadas tais operações devem ter os mesmos números de linhas e colunas. Portanto, as matrizes devem ser de mesma ordem.

- Exemplo 5)

Figura 41 - Adição de Matrizes

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}} + \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{A+B}{\begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}}$$

Observe que: $A + B$ existe se, e somente se, A e B forem do mesmo tipo.

Figura 42 - Subtração de Matrizes

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}} - \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}} + \underset{B}{\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B}} = \underset{A+B}{\begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}}$$

Observe que: $A - B$ existe se, e somente se, A e B forem do mesmo tipo.

- Propriedades: Sendo A, B e C matrizes do mesma ordem ($m\,x\,n$), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) Comutativa: $A + B = B + A$
b) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
c) Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$, sendo 0 a matriz nula m x n
d) Elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

- Multiplicação de um número real por uma matriz: Dado um número real x e uma matriz A do tipo m x n, o produto de x por A é uma matriz B do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de A por x, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$B = xA$$

Observe o seguinte exemplo:

Figura 43 - Multiplicação de Matriz por número real

$$3.\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{3A}{\begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}$$

- Propriedades: Sendo A e B matrizes do mesmo tipo (m x n) e x e y números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) Associativa: $x(yA) = (xy)A$

b) Distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: $x(A + B) = xA + xB$

c) Distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: $(x + y)A = xA + yA$

d) Elemento neutro: $xA = A$, para $x = 1$, ou seja, $A = A$.

- Multiplicação entre Matrizes: O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos sus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{mxp}$ e $B = (b_{ij})_{pxn}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$, em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B.

Vamos multiplicar a matriz $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B_{2x2} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

para entender como se obtém cada c_{ij}.

- 1ª linha e 1ª coluna

Figura 44 - Multiplicando primeira linha por primeira coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{4} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

Figura 45 - Multiplicando primeira linha por segunda coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

Figura 46 - Multiplicando segunda linha por primeira coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{4} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \,.\, (-1) + 2 \,.\, 4 & 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3 \,.\, (-1) + 4 \,.\, 4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

Figura 47 - Multiplicando segunda linha por segunda coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ 3.(-1) + 4.4 & \underbrace{\boxed{3.3 + 4.2}}_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$

Observe que,

Figura 48 - Relações entre Linhas e Colunas

$$BA = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1).1 + 3.3} & \boxed{(-1).2 + 3.4} \\ \boxed{4.1 + 2.3} & \boxed{4.2 + 2.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A,$ e para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

- Propriedades

a) Associativa: $(AB)\,C = A(BC)$

b) Distributiva em relação à adição: $A(B + C) = AB + AC \; ou \; (A + B)C = AC + BC$

c) Elemento neutro: $A \, . I_n = I_n \, . A = A$, sendo $\boldsymbol{I_n}$ a matriz identidade de ordem n.

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes.

Também vale o anulamento do produto, ou seja: sendo 0 uma matriz nula, A.B =0 não implica, necessariamente, que $A = 0 \; ou \; B = 0$.

- Determinantes: O determinante é o valor associado a uma matriz quadrada. Esse número é encontrado fazendo-se determinadas operações com os elementos que compõe a matriz. Indicamos o determinante de uma matriz A por $det\,A$. Quando falamos de determinante, podemos pensar sobre a solução de alguns possíveis sistemas. Uma informação importante é que para que o sistema tenha uma única solução, o determinante da matriz precisa ser diferente de 0.

- Determinante de matriz de ordem 2: Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a M, determinante de 2ª ordem, é dado por:

Figura 49 - Determinante de uma Matriz de 2ª Ordem

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Sendo, $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

Figura 50 - Determinante Matriz M

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{2\,.\,5} - \underbrace{4\,.\,3} = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

- Determinate de uma matriz de ordem 3: O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado regra de Sarrus.

Figura 51 - Matriz D

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Acompanhe como aplicamos essa regra: .

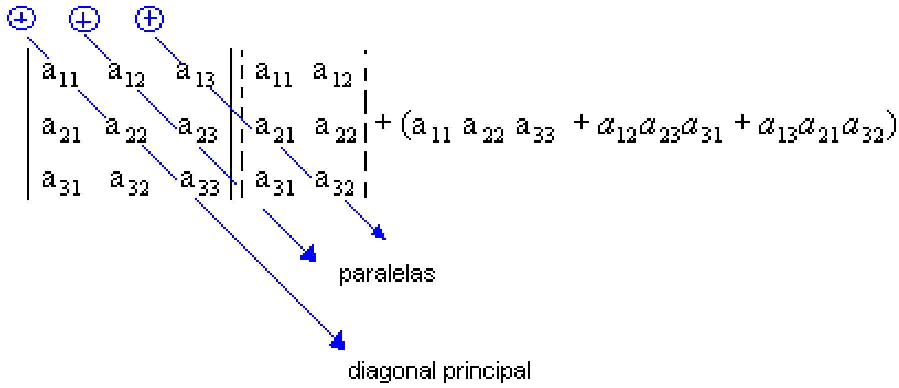
- **1º passo**: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

Figura 52 - Ampliação da Matriz

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

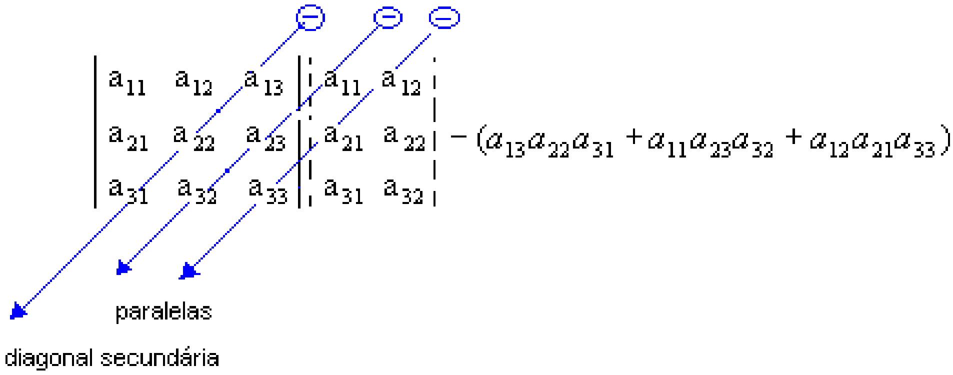
- **2º passo**: Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

Figura 53 - Distribuindo as Multiplicações Positivas



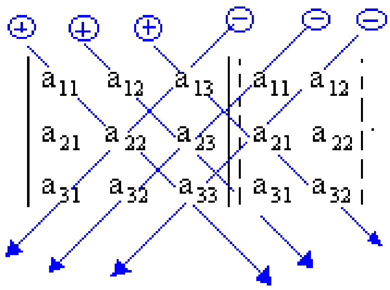
- **3º passo**: Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):

Figura 54 - Distribuindo as Multiplicações Negativas



Assim:

Figura 55 - Resultado do Determinante de Matriz de 3ª Ordem



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

- Determinante de ordem $n > 3$: A regra de Sarrus é válida para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3. Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar um outro teorema, o Teorema de Laplace.

- Exercício 4)

(IFSUL 2017 - Adaptada) O salário total $s(x)$ de um funcionário de certa empresa é composto de duas partes, uma fixa no valor de R$ 1.230,00 e outra que varia de acordo com a Função $s(x) = 10x + detA$, sendo x o tempo de serviço, em anos, do funcionário na empresa, com

Figura 56 - Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

O salário total do funcionário que trabalha há três anos nesta empresa é?

Resolução:

Primeiro vamos calcular o determinate da matriz A, como matriz é de ordem 3 usaremos o teorema de sarrus.

1° repetimos a primeira e a sugunda coluna

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & x & x^2 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right|$$

2° Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & x & x^2 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right|$$

$$(1.1.1) + (x.0.3) + (x^2.2.5) = 1 + 0 + 10x^2 = 10x^2 + 1$$

3° Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundaria.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & x & x^2 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right|$$

$$\text{-}(3.1.x^2) + (5.0.1) + (1.2.x) = 3x^2 + 0 + 2x = -3x^2 - 2x$$

4° Somamos a diagonal principal com a segundaria.

$$10x^2 + 1 - 3x^2 - 2x = 7x^2 - 2x + 1$$

O salário total do funcionário que trabalha há três anos nesta empresa é:

$$s(x) = 10x + detA + 1230$$

$$s(x) = 10x + 7x^2 - 2x + 1 + 1230$$

$$s(x) = 7x^2 + 8x + 1231$$

$$s(3) = 7(3)^2 + 8.3 + 1231$$

$$s(3) = 7.9 + 24 + 1230$$

$$s(3) = 63 + 24 + 1230$$

$$s(x) = R\$\ 1.316{,}00$$

- Exercício 5)

(ESPCEX 2019) A condição para que o sistema $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, $a \in R$, tenha solução única é:

a) $a \neq 1$

b) $a \neq -1$

c) $a \neq 2$

d) $a \neq -2$

e) $a \neq 0$

Resolução:

Para que o sistema tenham uma única solução, o determinate da matriz precisa ser diferente de 0.

Usando matrizes para resolucionar o problema temos que

1° Repetimos as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{c|cc|cc|} a & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

2° Fazendo a soma dos produtos da diagonal principal e secundaria.

$$(a.2.1) + (1.1.1) + (1.1.1) = 2a + 2$$

$$-(1.2.1) + (1.1.a) + (1.1.1) = -(2 + a + 1) = -a - 3$$

$$2a + 2 - a - 3 = a - 1$$

3° Para ter unica solução, o determinate precisa ser diferente de 0 logo,

$$a - 1 \neq 0$$

$$a \neq 1$$

Resposta correta letra a).

REFERÊNCIAS:

Dante, Luis Roberto. Matemática, Volume único. 1ª edição, SP: Editora ática, 2011;
FOSSA, J. A. Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

ANEXO 7 e 8 – LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Sobre as sentenças:

I- O produto das matrizes $A_{3x2}.B_{2x1}$ é uma matriz 3 x 1.
II- O produto das matrizes $A_{5x4}.B_{5x2}$ é uma matriz 4 x 2.
III- O produto das matrizes $A_{2x3}.B_{3x2}$ é uma matriz 2 x 2.

É verdade que:

a) Somente a III é falsa
b) Somente a I é falsa
c) I, II, III são falsas
d) Somente a II é falsa
e) Somente a I e II são falsas.

Resolução:

Quando multiplicamos matrizes de ordens $(m\ x\ n)$ e $(a\ x\ b)$ temos que o produto dará uma matriz $(m\ x\ b)$, linha da primeira matriz com a coluna da segunda.

I- O produto da matriz $A_{3x2}.B_{2x1}$ será uam matriz C_{3x1}. Logo é verdadeira
II- O produto da matriz $A_{5x4}.B_{5x2}$ será uam matriz C_{5x2}. Logo é falso
III-O produto da matriz $A_{2x3}.B_{3x2}$ será uam matriz C_{2x2}. Logo é verdadeira

Logo a afirmativa correta é a letra d).

2) (ENEM-2021 - Adaptado) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares $(T_1, T_2, T_3, T_4\ e\ T_5)$ mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento aij significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_I no item I_I A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

Figura 57 - Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o:

a) T_1

b) T_2

c) T_3

d) T_4

e) T_5

Resolução:

Como os I_n representam cada nota e a_{ij} é cada nota dada então cada linha representa um aparelho celular.

a) Fazendo a soma de T_1 temos $(6+9+9+9+8) = 41$

b) Fazendo a soma de T_2 temos $(9+6+7+8+9) = 39$

c) Fazendo a soma de T_3 temos $(7+10+10+7+10) = 44$

d) Fazendo a soma de T_4 temos $(8+8+10+10+9) = 45$

e) Fazendo a soma de T_5 temos $(8+8+8+9+9) = 42$

Logo a alternativa correta é a letra d).

3) (ENEM – 2019 - Adaptada) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

Figura 58 - Matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na:

a) Segunda- feira
b) Terça-feira
c) Quarta-feira
d) Quinta-feira
e) Sexta-feira

Resolução:

Na segunda-feira a soma dos testes foram $(3 + 3 + 2 + 3 + 0) = 11$

Na Terça-feira a soma dos testes foram $(2 + 2 + 2 + 2 + 2) = 10$

Na quarta-feira a soma dos testes foram $(0 + 4 + 2 + 4 + 0) = 10$

Na quinta-feira a soma dos testes foram $(1 + 1 + 3 + 1 + 4) = 10$

Na sexta-feira a soma dos testes foram $(2 + 2 + 2 + 0 + 4) = 10$

O dia que os testes tiveram o maior resultado foi na segunda-feira letra a).

4) (ENEM-2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

Figura 59 - Médias Anuais

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Resolução:

Para calcular a média aritmética de quatro notas, devemos somar as quatro notas e dividi-la por 4, ou seja,

$$\frac{nota\ 1 + nota\ 2 + nota\ 3 + nota\ 4}{4}$$

Logo a matriz será com 4 linhas e uma coluna.

$$M_{4x1} = \begin{bmatrix} \frac{Notas}{4} \\ \frac{Notas}{4} \\ \frac{Notas}{4} \\ \frac{Notas}{4} \end{bmatrix}$$

A matriz 4×4 obtida pelas notas deve ser multiplicada por uma matriz coluna 4×1, no qual cada um dos quatro elementos é igual 1/4, pois o elemento neutro da multiplicação é 1, que é a matriz da alternativa e).

5) (ENEM – 2018 - Adaptada) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos ($1, 2, 3, 4$ e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz A = [a_{ij}], em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos a_{ij} = 0, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

Figura 60 - Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução:

Banco 1:$(0 + 2 + 0 + 2 + 2) = 6$

Banco 2:$(0 + 0 + 2 + 1 + 0) = 3$

Banco 3:$(1 + 2 + 0 + 1 + 1) = 5$

Banco 4:$(0 + 2 + 2 + 0 + 0) = 4$

Banco 5:$(3 + 0 + 1 + 1 + 0) = 5$

O banco que fez mais TED foi o banco 1, letra a).

5.1.2 Relatório Aula 7

No dia 24 (vinte e quatro) de abril de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o sétimo encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet*, por meio do link https://meet.jit.si/promat_sala1. A nossa lista de chamada é composta por 39 alunos, porém, estavam conectados no início da aula somente 14 alunos.

O grupo é formado por três alunos ministrantes da aula, do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas.

Tendo somente três aulas para a finalização do projeto, a sétima e oitava aula foi desenvolvida em um único plano, uma vez que os conteúdos associados e o tema final do PROMAT, tratava de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes.

Iniciamos a sétima aula resolvendo alguns exercícios da aula anterior para relembrar e verificar se ainda havia alguma dúvida a respeito do conteúdo.

Posteriormente, sobre progressão geométrica, dialogamos e conceituamos sobre sistemas lineares, sobretudo acerca da classificação e os métodos de Adição e Substituição para a resolver os sistemas, seguido de exercícios para consolidação do conteúdo.

Em geral, nessa e em todas as aulas anteriores, empregamos a resolução de problemas como metodologia abordada. Tivemos uma boa participação dos alunos, os quais tiraram dúvidas, e manifestaram interesse quanto a aula.

Utilizamos para essa aula, o site Miro e o Microsoft Word, além de slides para explanação do conteúdo e resolução dos exercícios propostos.

Assim, como todo final de aula, disponibilizamos o material aplicado no decorrer da aula e uma nova lista de exercícios. A resolução da lista da aula anterior foi disponibilizada na sexta feira, para que analisassem e caso houvesse dúvidas, seriam esclarecidas no sábado.

Todas as aulas do projeto PROMAT foram gravadas para posterior estudo e análise.

5.1.3 Relatório Aula 8

No dia 8 (oito) de maio de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o oitavo e penúltimo encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet*, por meio do link https://meet.jit.si/promat_sala1 . A nossa lista de chamada é composta por 39 alunos, mas, estavam conectados no início da aula somente 16 alunos. O grupo é formado por três alunos ministrantes da aula, do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas. Chegamos na oitava e penúltima aula do projeto, e como já havia mencionado no relatório do plano de aula 7, a sétima e oitava aula foi desenvolvida em um único plano de aula, uma vez que os conteúdos são associados, desta forma, trataremos de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes.

Iniciamos a oitava aula resolvendo alguns exercícios da aula anterior para relembrar e verificar se ainda havia alguma dúvida a respeito de sistemas lineares.

Posteriormente, dialogamos e conceituamos, sobre a representação de sistema lineares por meio de matrizes, e com base a isto, apresentamos as definições, ordens e tipos de matrizes, bem como as operações realizadas com matrizes e suas propriedades.

Além disso discutiu-se como encontrar o determinante por meio da Regra de Cramer e Sarrus, seguido de exercícios para a consolidação do conteúdo.

Empregamos a resolução de problemas como metodologia abordada durante todas as aulas do PROMAT, obtivemos uma boa participação dos alunos referente os conteúdos tratados e as dúvidas surgidas foram construtivas para o andamento das aulas.

Assim, como todo final de aula, disponibilizamos o material aplicado no decorrer da aula e uma nova lista de exercícios. A resolução da lista da aula anterior foi disponibilizada na sexta feira, para que analisassem e caso houvesse dúvidas, seriam esclarecidas no sábado.

Todas as aulas do projeto PROMAT foram gravadas para posterior estudo e análise delas, além de ter sido realizada a chamada em todos os encontros.

5.2.1 Plano de Aula 9

PLANO DE AULA

9º ENCONTRO – 15/05/2021

- Público-Alvo:

Alunos, preferencialmente do 3º ano do Ensino Médio da Rede Públicade Ensino - NRE CASCAVEL e/ou candidatos que participarão do Vestibular Unioeste 2021 e ENEM.

- Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

- Objetivo Geral:

Revisar os conteúdos tratados durante as aulas anteriores do PROMAT, trazendo os conteúdos de Função, progressões aritiméticas e geometricas, sistemas lineares, matrizes e determinantes.

- Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar a revisão dos conteúdos propostos objetiva-se ao aluno:

- Revisar os tipos de funções, suas classificações, gráficos e resolução de exercicios.
- Relembrar as fórmulas, bem como as classificações das progressões aritiméticas e geométricas.
- Resolver sistemas lineares, matrizes e determinates.

- Conteúdo:

Funções, Progressões Aritiméticas, Progressões Geometricas, Sistemas lineres, Matrizes e Determinates. Aplicações e resoluções de exercícios;

- Recursos Didáticos:

Aula expositiva e dialogada em sistema de vídeochamada utilizando o Google Meet e site Miro.

FUNÇÕES

- Definição: Função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto A a um único elemento de outro conjunto B. Para cada valor de $x \in A$, pode-se determinar um único valor de $y \in B$.

Em uma Função f: A → B o conjunto A é designado de domínio e o conjunto B é denominado de contradomínio.

- Conjuntos Numéricos: Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

- Definição: A Função Afim, também chamada de Função do 1º grau, é uma Função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais.

Neste tipo de Função, o número a é denominado de coeficiente de x conhecido como coeficiente angular. Já o número b é conhecido como coeficiente linear.

- Exercício 1)

(Encceja 2018) Uma prestadora de serviços cobra pela visita à residência do cliente e pelo tempo necessário para realizar o serviço na residência.

O valor da visita é R$ 40,00 e o valor da hora para realização do serviço é R$ 20,00.

Uma expressão que indica o valor a ser pago (P) em Função das horas (h) necessárias à execução do serviço é?

Resolução:

A Função é descrita por $P = ah + b$, em que b é a taxa fixa, que, no caso, é o valor da visita, que é R$ 40,00. Já o coeficiente a é a taxa que depende do número de horas, no caso, R$ 20,00. Substituindo, temos que:

$$P = 20h + 40$$

- Exercício 2)

(Uepa 2015) Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU) a população da Terra atingiu a marca de 7,2 bilhões de habitantes em 2013, dados publicados no estudo “Perspectivas de População Mundial”. De acordo com as projeções de crescimento demográfico, seremos 8,1 bilhões de habitantes em 2025 e 9,6 bilhões de habitantes em 2050. Supondo que a partir de 2025, a população mundial crescerá linearmente, a expressão que representará o total de habitantes (H), em bilhões de pessoas, em Função do número de anos (A) é:

$a)\ H = 0{,}060.A + 8.1$

$b)\ H = 0{,}036.A + 7{,}2$

$c)\ H = 0{,}060.A + 9{,}6$

$d)\ H = 0{,}036.A + 8{,}1$

$e)\ H = 0{,}060.A + 7{,}2$

Resolução:

Tomando $A = 0$ para o ano de 2025 temos que $H = 8{,}1$. Tomando $A = 25$ para o ano de 2050, obtemos os pontos (0; 8,1) e (25; 9,6). Desse modo, temos que

$$a = 9{,}6 - 8{,}1 /25 - 0$$

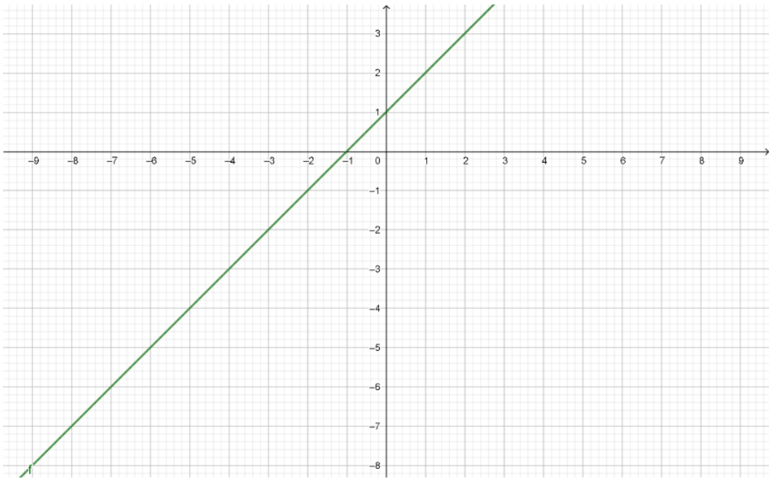
$$a = 1{,}5/25$$

$$a = 0{,}06$$

Portanto, a lei de H é $H(A) = 0{,}06.A + 8{,}1$.

- Gráfico de Função Afim: O gráfico da Função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma reta. O coeficiente de x , a está ligado a sua inclinação em relação ao eixo x, o eixo das abscissas.

Figura 61 - Função $f(x) = x + 1$



- Exercício 3)

(FGV-SP- 2013- Adaptada) No plano cartesiano, a reta (r) intercepta o eixo x e y nos pontos $(5,0)$ e $(0,2)$; a reta (s) intercepta os eixos nos pontos $(1,0)$ e $(0,-1)$. Encontre a equação das retas (r) e (s).

Resolução: Primeiro vamos encontra a equação das duas retas

Temos que a reta (r) tem os pontos $(5,0)$ e $(0,2)$ logo,

$$a = \frac{2-0}{0-5}$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

Substituindo um dos pontos $(5,0)$ na nossa equação $f(x) = ax + b$,temos:

$$0 = -\frac{2}{5}.5 + b$$

$$0 = -2 + b$$

$$b = 2$$

Então, nossa reta (r) é $y = -\frac{2}{5}x + 2$

Agora vamos encontra a equação da reta (s), que tem os pontos $(1,0)$ e $(0,-1)$ logo,

$$a = \frac{-1-0}{0-1}$$

$$a = \frac{-1}{-1} = 1$$

Substituindo um dos pontos $(1,0)$ na equação $f(x) = ax + b$,temos:

$$0 = 1.1 + b$$

$$0 = 1 + b$$

$$b = -1$$

Então, a reta (r) é $f(x) = x - 1$

- Função Quadrática: Uma Função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Zeros (ou raízes) da Função quadrática: Os zeros da Função quadrática são os valores de x que anulam a Função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, os zeros de $f(x)$ são os valores de x para os quais $ax^2 + bx + c = 0$.

Note que $f(x) = ax^2 + bx + c$, é uma equação do segundo grau, portanto os valores de x que satisfazem essa condição são as mesmas raízes da equação do segundo grau. Assim, a fórmula que fornece as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Podemos escrever:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Exercício 4)

Calcule o valor de k de modo que a Função $f(x) = 4x^2 - 4x - k$ não tenha raízes, isto é, o gráfico da parábola não possui ponto em comum com o eixo x.

Resolução:

Para isso, precisamos que:

$$\Delta < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(-4)^2 - 4.4(-k) < 0$$

$$16 + 16k < 0$$

$$16k < -16$$

$$k < -1$$

- Exercício 5)

O gráfico da Função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, em que $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Determine y associado ao valor de $x = 2$.

Resolução: Um ponto em comum significa dizer uma única raiz, então $\Delta = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$0 = (-m)^2 - 4.1(m - 1)$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.4$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$m = \frac{4}{2}\ e\ m = 2$$

$$y = x^2 - mx + (m - 1)$$

Substituir $m = 2$, no intuito de obter a lei da Função.

$$y = x^2 - 2x + (2 - 1)$$

$$y = x^2 - 2x + 1$$

Substituindo $x = 2$, para determinarmos o valor de y

$$y = 2^2 - 2.2 + 1$$

$$y = 4 - 4 + 1$$

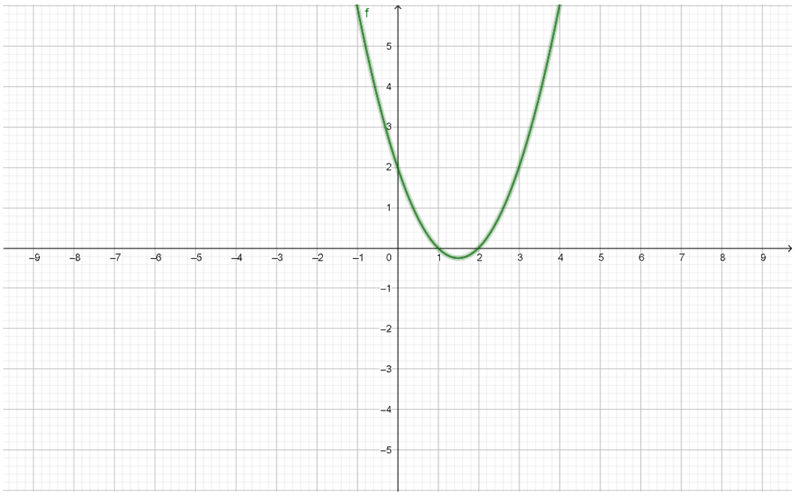
$$y = 1$$

Temos que a equação possui a lei de formação $y = x^2 - 2x + 1$. E quando $x = 2$, o valor de y se torna igual a 1.

- Gráfico de Função Quadrática: O gráfico de uma Função quadrática é uma parábola. O coeficiente a está relacionado à concavidade da parábola.

Ou seja, se $a > 0$ a concavidade da parábola está votada para cima. E, se $a < 0$, a concavidadeda parábola estará voltada para baixo. O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola. Isto é, se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramodecrescente; se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente; e, se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice da parábola. O coeficiente c é o ponto de interseção da parábola com o eixo y.

Figura 62 - Função $f(x) = x^2 - 3x + 2$



- Função Injetora: Diz-se que $f : A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \epsilon A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Função Sobrejetora: Uma Função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora quando, para qualquer elemento y ϵ B, pode-se encontrar um elemento $x \epsilon A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, $Im = CD$.

- Função Bijetora: Diz-se que f é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

- Polinômio: Um polinômio é uma expressão algébrica formada por um ou mais termos. Assim, monômio, binômio e trinômio são tipos de polinômios, as expressões algébricas que possuem mais de três monômios não recebem nomes particulares.

- Grau de um polinômio: Chamamos de grau de um polinômio o maior número inteiro de um expoente cujo coeficiente é diferente de zero.

- Exercício 6)

Determine o grau dos polinomios a seguir.

a) $3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 1$
b) $-2x^2 + 1$
c) $3x + 4$

Resolução:

a) Temos que o seu grau vale 7, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente, 7 e 3
b) Temos que o seu grau vale 6, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente, 4 e 6
c) Temos que o seu grau vale 10, pois a soma dos expoentes do 1° e 2° termos são iguais a, respectivamente, 10 e 0.

- Valor numérico de um polinômio: O valor numérico de um polinômio é obtido a partir da substituição da variável por um número.

- Raiz de um polinômio: Definimos como raiz (ou zeros) de um polinômio e como sendo o valor que a variável assume de modo que o valor numérico do polinômio seja igual à zero, isto é, x será raiz de p se $p(x) = 0$.

Exercício 7)

Encontre os valores númericos dos polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 4$ e diga se é ou não a raiz do polinômio.

a) $p(2) =$
b) $p(1) =$
c) $p(0) =$

Resolução:

d) $p(2) = 2^2 - 5.2 + 4 = 10$
e) $p(1) = 1^1 - 5.1 + 4 = 0$, 1 é raiz do polinômio
f) $p(0) = 0 - 0 + 4 = 4$

- Multiplicação de polinômios: A multiplicação de polinômios consiste-se na aplicação da propriedade distributiva e na redução de termos semelhantes.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

- Sequência: É um conjunto no qual seus elementos estão dispostos em determinada ordem. No caso de uma sequência numérica, seus elementos são números.

- Exemplo 1)

- {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}, sequência de números naturais;

- {0, 2, 4, 6, 8, 10, …}, sequência de números naturais pares;

Ainda, vamos tratar também de algumas classificações das Progressões Aritméticas.

- P.A crescente: uma P.A. é crescente, se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente.
- P.A constante: uma P.A. é constante se, e somente se, todos os seus termos são iguais entre si.
- P.A decrescente: uma P.A. é decrescente se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo precedente.

- Termos de uma Progressão Aritimética

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r$$

Em que,

r é a razão

a_1 é o primeiro termo da P.A.

n é o número de termos da P.A.

a_n é o último termo da P.A.

- Exercício 8)

(ESA- 2011) O preço de uma máquina nova é R$ 150.000,00. Com o uso, seu valor sofre uma redução de R$ 2500,00 por ano. Sendo assim, por qual valor o proprietário da máquina poderá vendê-la daqui a 10 anos?

Resolução:

O problema indica que a cada ano o valor da máquina sofre uma redução de R$ 2.500,00. Logo, essa sequência forma uma PA de razão igual $a - 2500$. Usando a fórmula do termo geral da PA, podemos encontrar o valor pedido.

$$an = a_1 + (n - 1) . r$$

Substituindo os valores, temos:

$$n = 10$$

$$a_1 = 150000$$

$$r = -2500$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

$$a_{10} = 150000 + (10 - 1)(-2500)$$

$$a_{10} = 150000 - 22500$$

$$a_{10} = 12500$$

- Soma dos termos de uma Progressão Aritmética

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Em que,

a_1 é o primeiro termo da P.A.

a_n é último termo a ser somado na P.A.

n é o número de termos a serem somados na P.A.

- Exercício 9)

Um ciclista percorre 15 km na primeira hora de uma corrida. Na segunda hora de corrida, seu rendimento cai e ele só consegue percorrer 13 km, e na hora seguinte 11 km. Continuando nesta sequência, quantos quilômetros ele conseguirá percorrer nas 6 horas de prova?

Resolução:

Para calcular o total de quilômetros percorridos em 6 horas, precisamos somar os quilômetros percorridos em cada hora.

A partir dos valores informados, é possível notar que a sequência indicada é uma PA, pois a cada hora ocorre uma redução de 2 quilômetros $(13 - 15 = -2)$.

Portanto, podemos usar a fórmula da soma de uma PA. ,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Temos que:

$$a_1 = 15$$

$$r = -2$$

$$n = 6$$

Primeiro encontraremos a_6

$$a_6 = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_6 = 15 + (6 - 1).(-2)$$

$$a_6 = 15 + 5.(-2)$$

$$a_6 = 15 - 10$$

$$a_6 = 5$$

Agora que conhecemos o valor de a_6, basta substituir todos os valores na fórmula da soma para encontrar o seu valor:

$$s_6 = \frac{6(15 + 5)}{2}$$

$$s_6 = \frac{6.20}{2}$$

$$s_6 = \frac{120}{2}$$

$$s_6 = 60$$

Assim, ao final de 6 horas, o ciclista percorreu 60 km.

PROGRESSÃO GEOMETRICA

- Classificação das Progressões Geométricas: Dependendo dos termos que compor uma Progressão Geométrica ela será classificada em:

- Progressão Geométrica crescente: é aquela que os valores dos termos vão crescendo.
  $a_1 > 0\ e\ q > 1$, por exemplo: $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$
  $a_1 < 0\ e\ 0 < q < 1$, por exemplo: por exemplo $\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \dots.\}$

- Progressão Geométrica decrescente: é aquela que os valores dos termos vão decrescendo.
  $a_1 > 0\ e\ 0 < q < 1$, por exemplo: $\{64, 32, 16, 8, \dots\}$
  $a_1 < 0\ e\ q > 1$, por exemplo: $\{-2, -4, -8, \dots\}$

- Progressão Geométrica constante: é aquela que os valores do termos são iguais, ou seja, a razão é igual a $q = 1$.
  Por exemplo: $\{5,5,5,5, \dots, 5\}$

- Progressão Geométrica oscilante: é aquela que os valores dos seus termos intercalam em negativos e positivos, ou seja, $a_1 \neq 0 \; e \; q < 0$.

- Progressão Geométrica quase nula: é aquela que apenas o primeiro termo é diferente de zero.
  Por exemplo: $\{2,0,0,0,0,0,...\}$

- Termo Geral da Progressão Geométrica: O termo geral de uma Progressão Geométrica é uma fórmula usada para encontrar um termo qualquer da sequência. Para isso, é necessário conhecer o primeiro termo, a razão da progressão e a posição do termo a ser encontrado nela. Considerando-se uma Progressão Geométrica qualquer, cujo primeiro elemento é a_1 e a razão é q, o termo geral a_n é dado pela fórmula:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Em que:

n é o índice do termo que queremos determinar, ou seja, está ligado à posição do termo na progressão.

a_1 é o primeiro termo da progressão geométrica

q é sua razão.

- Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita: A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ de razão $q \neq 1$ é igual a.

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Exercício 10)

A sequência seguinte é uma progressão geométrica, observe: $\{2, 6, 18, 54...\}$. Determine o 8º termo dessa progressão.

Resolução:

Razão da progressão:

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

Assim, para

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$a_8 = 2.3^{8-1}$$
$$a_8 = 2.3^7$$
$$a_8 = 2.2187$$
$$a_8 = 4374$$

- Exercício 11)

(UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é:

b) 75%
c) 80%
d) 83,33%
e) 87,5%

Resolução:

Como não temos conhecimento da quantidade inicial de coelhos, podemos afirmar que esse valor é x. Sendo assim, passados quatro meses, a população de coelhos tornou-se $2x$; passados oito meses, já havia $4x$; após 12 meses, a polução de coelhos era de $8x$. Isso pode ser representado como uma P.G $\{x,\ 2x,\ 4x,\ 8x\}$ de razão 2.

Conforme o enunciado, atualmente o criador de coelhos possui $8x$ animais. Se ele deseja voltar a ter apenas a quantidade inicial (x), ele deverá vender $7x$. Podemos calcular a porcentagem da criação que ele venderá através do quociente entre $7x\ e\ 8x$:

$$\frac{7x}{8x} = \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\%$$

Portanto, a alternativa correta é a letra d).

SISTEMAS LINEARES, MATRIZES E DETERMINANTES

- Equação Linear: É toda equação que possui variável como x, y, z, w, e apresenta-se na seguinte forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2\ e\ a_3, \dots, a_n$, são os coeficientes reais e o termo independente é representado pelo número real *b*.

- Sistema Linear: Um conjunto de *m* equações lineares com variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, formam um sistema linear com *m* equações e *n* incógnitas.

- Exemplo 2)

Sistema linear com duas equações e três variáveis: $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 24 \\ x - y + 10z = 30 \end{cases}$

- Classificação de um Sistema Linear: Todo sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções apresentadas por ele.

- SPD, Sistema Possível e Determinado, qual possui uma única solução.
- SPI , Sistema Possível e Indeterminado, qual possui infinitas soluções.
- SI, Sistema Impossível, em que não possui solução.

- Metódo da Substituição

- Método da adição

Exercício 11)

(Unisinos 2012) Numa loja, todas as calças têm o mesmo preço, e as camisas também, sendo o preço de uma calça diferente do de uma camisa. Ricardo comprou 1 calça e 2 camisas e pagou $R\$\ 240{,}00$. Roberto comprou 2 calças e 3 camisas e pagou $R\$\ 405{,}00$. Qual o preço, em reais, de uma calça e uma camisa, respectivamente?

a) 70 e 95.
b) 75 e 90.
c) 80 e 85.
d) 85 e 80.
e) 90 e 75.

Resolução:

Preço da calça: x

Preço da camisa: y

Com as informações do problema, escrevemos o sistema linear.

$$\begin{cases} x + 2y = 240 \\ 2x + 3y = 405 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $x = 90$ e $y = 75$.

Portanto, o valor da calça será $R\$\ 90{,}00$ e o da camisa $R\$\ 75{,}00$

- Matrizes: As matrizes são sempre representadas por letras maiúsculas A, B, C ..., que são acompanhadas por índices, nos quais o primeiro número indica a quantidade de linhas, e o segundo, o número de colunas.

- Ordens e Tipos de Matrizes: Uma matriz é dada pela sua ordem dependendo da quantidade de elementos em suas linhas e colunas ou por características específicas.

- Exemplo 3)

$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 3 x 2. Uma matriz contendo 3 linhas e 2 colunas.

- Exercício 12)

De acordo com a matriz dada, diga qual a sua denominação e a sua ordem.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $G^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

h) $H = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) Matriz Linha de ordem 1x4.

b) Matriz Coluna de ordem 3x1.

c) Matriz Quadrada de ordem 2x2.

d) Matriz Nula de ordem 2x3.

e) Matriz Diagonal de ordem 3x3.

f) Matriz Identidade de ordem 3x3.

g) Matriz Transposta de ordem inicial 2x3 e ordem final 3x2.

h) Matriz Oposta de ordem 2x2.

- Adição e subtração de matrizes: A adição e subtração de matrizes consistem em realizar uma operação de adição ou subtração entre duas matrizes de mesma ordem.

- Multiplicação de um número real por uma matriz: Dado um número real x e uma matriz A do tipo $m\ x\ n$, o produto de x por A é uma matriz B do tipo $m\ x\ n$ obtida pela multiplicação de cada elemento de A por x.

$$B = xA$$

- Multiplicação de Matrizes: O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

- Determinantes: O determinante é o valor associado a uma matriz quadrada. Esse número é encontrado fazendo-se determinadas operações com os elementos que compõe a matriz.

- Determinante de matriz de ordem 2: o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

- Determinante de uma matriz de ordem 3: O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado regra de Sarrus.

- Determinante de ordem $n > 3$: Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar o Teorema de Laplace.

Exercício 13)

(Unicap) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Aplicando a regra de Sarrus, temos que o determinante será da seguinte forma.

$$detA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \\ 6 & x \end{matrix} = 9.(x-7) + 48 + 4x - 54 - 4x - 8(x-7) = 0$$

$$detA = (x-7) - 6 = 0$$

$$x - 13 = 0$$

$$x = 13$$

- Exercício 13)

(ENEM – 2019 - Adaptada) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na:

a) Segunda-feira
b) Terça-feira
c) Quarta-feira
d) Quinta-feira
e) Sexta-feira

Resolução:

Na segunda-feira a soma dos testes foram $(3 + 3 + 2 + 3 + 0) = 11$

Na Terça-feira a soma dos testes foram $(2 + 2 + 2 + 2 + 2) = 10$

Na quarta-feira a soma dos testes foram $(0 + 4 + 2 + 4 + 0) = 10$

Na quinta-feira a soma dos testes foram $(1 + 1 + 3 + 1 + 4) = 10$

Na sexta-feira a soma dos testes foram $(2 + 2 + 2 + 0 + 4) = 10$

O dia que os testes tiveram o maior resultado foi na segunda-feira letra a).

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. 3. Ed. São Paulo. Editora Ática, 2011

Termo Geral de Progressão Aritmética. Disponível em <https://blog.professorferretto.com.br/termo-geral-de-uma-progressao-aritmetica>. Acesso em 14 de março de 2021.

GIOVANI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa. 1ª série Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2005

PROGRESSÃO ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E FRACTAIS - MÁRCIO MACÁRIO DA CUNHA. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=81634811100&d=20151201163301&h=151a0e62393a88c0ffd1e42d844dae438235e8b3>. Acesso em 15 de março de 2021.

5.2.2 Relatório 9

No dia 15 (quinze) de maio de 2021, sábado, às 9 horas, realizamos o nono e último encontro do PROMAT via Plataforma *Jitsi Meet*, por meio do link https://meet.jit.si/promat_sala1 . A nossa lista de chamada é composta por 39 alunos, mas, estavam conectados no início da aula somente 17 alunos. O grupo é formado por três alunos ministrantes da aula, do 3° ano do Curso de Matemática (Ada, Leticia e Vinicius) que se alternaram nas atividades propostas no projeto PROMAT.

A última aula do projeto, foi planejada para que pudéssemos realizar uma revisão dos conteúdos vistos durante as oito aulas anteriores.

Nas primeiras quatro aulas dos projetos abordamos o tema sobre funções, e o Vinicius ficou responsável por ministrar esse tópico na revisão, e tratava das definições de funções afim e quadrática, apresentando exemplos e exercícios para retirarem dúvidas ou esclarecer ainda mais sobre o conteúdo.

A segunda parte da revisão, a Ada tornou-se responsável em apresentar o conteúdo da quinta e sexta aula que era sobre Progressões Aritmética e Geométrica, abordando definições e exemplos, bem como exercícios propostos para esclarecimentos.

A terceira e última parte da revisão, foi apresentada pela Leticia, a qual ficou incumbida de finalizar o conteúdo sobre Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes, tratado nas aulas sete e oito, e abrangendo as formas de resolver sistemas, os tipos de matrizes e cálculos de determinantes por meio das regras mostradas nas aulas anteriores.

Como a aula foi uma revisão dos conteúdos tratados nas aulas anteriores, os alunos conseguiram tirar algumas dúvidas que não tinham tirado antes e manifestaram comentários positivos em relação a revisão dos conteúdos.

A resolução da lista da aula anterior foi disponibilizada no dia antecedente, para que analisassem e caso houvesse dúvidas, seriam esclarecidas no horário da aula.

Todas as aulas do projeto PROMAT foram gravadas para seu posterior estudo e análise, além de ter sido realizada a chamada em todos os encontros.

Encerramos as nove aulas do Projeto com muito orgulho, junto com nosso professor orientador Rogério, o qual nos orientou para que ministrássemos as aulas com muita alegria e excelência. Agradecendo a participação de todos, nos despedimos e reiteramos a importância que os alunos continuassem no PROMAT com a próxima turma de estagiários.

4. CONSIDERAÇÕES

O PROMAT como esperado foi de grande importância no que se diz a experiência em sala de aula, mesmo que virtual, nos proporcionando a oportunidade de ter contato com uma turma no papel de professor, nos permitindo aprendizado e reafirmando a vontade de sermos educadores.

Desde à preparação das aulas, tínhamos em mente a preocupação com a aprendizagem dos alunos, os quais possuíam dificuldades em diversos conteúdos matemáticos e viam a Matemática como algo abstrato e longe de sua realidade.

Para aplicar o conteúdo matemático buscamos exercícios que acreditávamos condizerem com a vivência dos alunos, para que eles percebessem a aplicação da Matemática no cotidiano, além de atividades de investigação Matemática e a realização de intervenções, o que acreditamos tornou os conteúdos menos inóspitos aos alunos do programa, quebrando a barreira presente entre os alunos e o conhecimento matemático.

Houve uma boa participação dos alunos durante a realização das atividades, sendo que esses participavam ativamente das aulas, gerando discussões sobre conteúdos, o que foi bem proveitoso para definir conceitos, abrindo microfone e comentando ou até mesmo em chat. Em diversas oportunidades, havia a exposição das respostas dos alunos em que comentavam sobre sua estratégia de resolução, o que favorecia o andamento da aula, pois, nos munia de diversas resoluções para um mesmo exercício, mostrando que não há só uma forma de resolver um exercício, e que cada aluno pensa de forma diferente, nos levando a estar preparados para diferentes possibilidades em uma sala de aula.

Durante o PROMAT, crescemos amplamente no âmbito pessoal, e claro que para nós o crescimento pessoal foi extremamente importante, pois esse está diretamente ligado com nosso lado educacional. Consideramos que um professor, antes de trabalhar com conteúdos sobre sua disciplina, realiza um trabalho com pessoas, as quais são únicas, cada pessoa tem sua personalidade e modo de agir, precisa ser respeitada e valorizada integralmente.

Acreditamos que cumprimos com objetivo proposto para o PROMAT. Por meio dos depoimentos e observações, pudemos perceber que os alunos compreenderam os conteúdos abordados nos nove encontros.

Ao longo do Projeto desenvolvemos paulatinamente a capacidade de perceber as dificuldades dos alunos, mesmo que eles não nos questionassem sobre o conteúdo, agíamos de forma a esclarecer incompreensões e sanar as dúvidas.

Durante todos os encontros, até mesmo antes e depois, compartilhamos ideias, princípios e conversas em um grupo específico de uma rede social de bate papo. Habitualmente, aos sábados, abríamos a sala e organizávamos os equipamentos tecnológicos. Quando os alunos entravam, a disposição favorecia o agrupamento.

Por fim, podemos enaltecer a importância do PROMAT para nossa formação e crescimento profissional, o qual nos forneceu experiências distintas das até então experimentadas em nossa curta atuação como docentes, como o uso de jogos e atividades lúdicas. Isso impactou positivamente em nossa atuação como educadores da disciplina de Matemática.